



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

교육학석사학위논문

다단계 인지진단평가 연구
- 고등학교 수열 단원을 중심으로 -

2017년 8월

서울대학교 대학원
수학교육과
신 세 리

다단계 인지진단평가 연구
- 고등학교 수열 단원을 중심으로 -

지도교수 유 연 주

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2017년 6월

서울대학교 대학원
수학교육과
신 세 리

신세리의 석사학위논문을 인준함

2017년 6월

위 원 장 정 상 권 (인)

부 위 원 장 이 경 화 (인)

위 원 유 연 주 (인)

다단계 인지진단평가 연구 -고등학교 수열 단원을 중심으로-

수학 평가의 목표는 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수활동과 수업 방법을 개선하는데 있다. 그러나 현재 학교 현장에서 진행되고 있는 평가는 총점을 바탕으로 서열을 정하는 역할에 머물고 있다. 따라서 평가의 본래 목표를 성취하기 위한 평가방식으로 최근 인지진단평가가 주목받고 있다. 인지진단평가는 학생들에게 학습의 목표가 되는 인지 요소들의 숙달 여부에 대한 정보를 제공해준다. 수학교과에는 인지 요소들 간의 위계 관계가 존재하므로, 요소 간 위계방식을 적용하여 인지진단평가를 수행할 수 있다.

또한 오늘날 평가는 학생 개개인의 능력과 관계없이 모든 학생들에게 동일한 검사지로 진행되는 지필평가가 주를 이루고 있다. 지필평가의 제한점을 극복하기 위해 학생들의 능력에 맞는 문제들을 바탕으로 평가를 진행하는 컴퓨터 적응검사가 발전하고 있다. 컴퓨터 적응검사의 한 유형인 다단계 검사는 문항들을 모듈로 묶어 학생들의 응답상황에 따라 다음 모듈이 제시되는 평가 방법이다. 따라서 학생 개개인의 능력에 따라 검사지가 다양하게 제시된다.

본 연구에서는 컴퓨터를 활용하여, 수학교과가 가진 위계적 성격을 반영한, 적응적 인지진단평가를 수행했다. 이를 위한 방법으로, 다단계 검사방식, 베이지안 네트워크, 요소 간 위계방식에 기반한 인지진단 평가를 제시하고 적용 가능성을 알아보았다.

연구를 위하여 다단계 인지진단평가를 수열단원을 중심으로 검사를 구성하고 서울지역의 고등학교 2학년 학생 291명을 대상으로 검사를 실시하였다.

수열 및 수열과 관련된 선행인지요소를 위계성을 고려하여 추출한 뒤, 인지요소들을 군으로 묶어 그에 해당하는 문항들을 모듈로 선정하였다. 초등학교 교육과정에서 ‘패턴의 인식 및 언어적 표현’, 중학교 교육과정에서 ‘함수 인식’, ‘기술적 지식’, 고등학교 교육과정에서 ‘수열의 일반항’, ‘등차·등비 수열의 합’, ‘여러 가지 수열의 합’, ‘유리식의 계산’ 등 총 7개의 모듈을 선정하였다. ‘수열의 일반항’ 모듈로 검사를 시작하고 각 모듈마다 베이저안 네트워크를 적용하여 학생들의 능력을 추정한 후 다음 모듈이 제시되는 알고리즘을 설정하여 평가를 구성하였다.

검사 결과, 많은 학생들이 수열과 관련된 선행인지요소들을 잘 숙달하고 있음을 확인하였다. 그러나 수열영역에서 수열의 일반항 및 합을 구하는 공식 등 다양한 공식과 기호 및 용어에 대한 이해에 어려움을 겪고 있음을 확인하였다. 또한 설문조사를 통해 학생들은 적응적 인지진단평가의 의의를 이해하고 평가의 효율성과 진단적 정보를 제공받는 것에 대해 긍정적으로 생각하는 것으로 나타났다.

이 연구는 컴퓨터를 활용하여 위계성을 반영한 적응적 인지진단평가를 수행하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서 제시된 진단평가방법은 능력수준이 다양한 학생들에게 행해졌던 기존의 전통적인 검사의 제한점을 극복하고 학생들의 학습상태를 진단할 수 있는 진단평가의 방법을 제시하였다는 점에 의의를 찾을 수 있다.

주요어: 다단계 평가, 인지진단평가, 요소 간 위계 방식, 베이저안 네트워크, 수열

학 번: 2015-21605

목 차

국문 초록	i
목차	iii
표 목차	v
그림 목차	vii
I. 서론	1
1. 연구의 필요성	1
2. 연구의 목적 및 질문	4
II. 이론적 배경	5
1. 인지요소위계를 반영한 인지진단검사	5
1. 1 인지진단평가와 Q행렬	5
1. 2 요소 간 위계방식(Attribute Hierarchy Method, AHM)	11
2. 베이지안 네트워크(Bayesian Networks, BNs)	15
3. 컴퓨터 적응검사(Computerized Adaptive Test, CAT)	21
4. 다단계 검사(Multi-Stage Test, MST)	24
III. 연구 방법	29
1. 검사 내용 및 검사 대상	29
2. 연구 절차	30
2. 1 수열의 개념과 선행인지요소	30

2. 2 인지요소 추출 및 위계 구조 설정	36
2. 3 다단계 검사를 위한 검사도구 제작	47
IV. 연구 결과	56
1. 다단계 검사에 따른 수열 단위와 관련 선행인지요소 숙달 양상	56
1. 1 컴퓨터 평가 구현 및 수행 결과	56
1. 2 단계 진행 유형 분석	60
1. 3 인지요소 프로파일	61
1. 4 인지요소 숙달양상 분석	67
2. 다단계 검사의 설문 응답 반응 조사	71
V. 결론	76
1. 논의 및 결론	76
2. 제한점 및 제언	78
참고문헌	81
부록	87
ABSTRACT	97

표 목 차

〈표 II-1〉 김희경(2013)이 제시한 문항과 인지요소 간 관계에 대한 Q행렬	6
〈표 II-2〉 인진진단모형의 분류	7
〈표 II-3〉 DINA모델과 Fusion 모델의 비교(김희경 외, 2013) ...	10
〈표 II-4〉 [그림 II-3]의 기대응답패턴	14
〈표 II-5〉 문항반응이 $X_1 = 1$ (정답), $X_2 = 0$ (오답), $X_3 = 1$ (정답)일 때 인지요소 조합별 $P(A1, A2, A3, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$...	20
〈표 III-1〉 2009 개정 교육과정에서의 수열단원의 내용체계 ...	31
〈표 III-2〉 2009 개정 교육과정에서의 수열단원의 내용과 성취기준	32
〈표 III-3〉 〈Pre K-12〉단계에 해당하는 대수 내용 영역의 표준(NCTM, 2000)	33
〈표 III-4〉 초등학교 규칙성 내용체계	34
〈표 III-5〉 중학교 함수 내용체계	35
〈표 III-6〉 중학교 문자와 식 내용체계	36
〈표 III-7〉 수열에 관한 인지요소	45
〈표 III-8〉 본 연구의 판정결과	50
〈표 III-9〉 G1, M1, M2, H1, H2, H3, H0모듈의 Q행렬 최종안 ...	53
〈표 IV-1〉 연구참여 학생 구성	60
〈표 IV-2〉 단계 진행 유형과 비율	61

〈표 IV -3〉 4단계(H1→M1→G1→M2)를 진행한 학생들의 인지요소 숙달 확률	62
〈표 IV -4〉 0.5이상의 숙달확률의 상대빈도 비율(%)	63
〈표 IV -5〉 인지요소 프로파일의 각 숫자에 대응되는 인지요소	65
〈표 IV -6〉 인지요소 프로파일	66
〈표 IV -7〉 설문 문항별 점수 평균과 표준편차	71
〈표 IV -8〉 응답한 의견의 실제 사례	75

그 립 목 차

[그림 II-1] 김희경(2013)이 제시한 문항과 인지요소 간 관계 예시	6
[그림 II-2] 인지요소 위계 유형(Leighton et al, 2004)	12
[그림 II-3] 인지요소 위계예시	13
[그림 II-4] [그림 II-3]의 Q행렬과 축소된 Q행렬	14
[그림 II-5] 베이지안 네트워크의 예	17
[그림 II-6] CAT를 실시하기 위한 일반적인 순서도(부재율, 2002)	23
[그림 II-7] 3단계로 구성된 다단계 검사 설계	25
[그림 III-1] 함수를 통한 수열의 도입	31
[그림 III-2] 수열내용과 관련된 중학교 문자와 식 영역 내용 계 통도(한국과학창의재단, 2014)	37
[그림 III-3] 수열내용과 관련된 초등학교 규칙성 영역 내용 계통 도(한국과학창의재단, 2014)	38
[그림 III-4] 수열내용과 관련된 중학교 함수 영역 내용 계통도 (한국과학창의재단, 2014)	39
[그림 III-5] 수열단원 내용 계통도(한국과학창의재단, 2014)	40
[그림 III-6] 인지요소의 위계구조	46
[그림 III-7] 다단계 검사 설계	49
[그림 IV-1] 다단계 평가가 구현된 화면	56
[그림 IV-2] 다단계 평가의 최종 결과 화면	59

[그림 IV-3] 학생들의 인지요소 숙달 비율	69
[그림 IV-4] 인지요소 간 결손 비율	70
[그림 IV-5] 각 문항에 대한 응답 그래프	72

I. 서론

1. 연구의 필요성

2009 개정 기본 방향에 따른 수학과 교육과정에서 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다고 명시하고 있다. 그러나 수능을 비롯하여 학교 현장에서 진행되고 있는 평가는 충점을 바탕으로 서열을 정하는 역할을 하고 있으며 이로 인해 학생들은 성취 목표의 달성여부에 관계없이 끊임없이 공부를 해야 하는 무한경쟁 속에 살고 있다. 이는 사교육의 증대뿐만 아니라 수학을 포기하는 학생들을 양산하고 있다. 이러한 평가방식은 학생들에게 성취감보다는 좌절감을 주어 수학에 대한 흥미를 잃고 포기하게 되는 것이다. 실제로 OECD에서 시행하는 국제학업 성취도평가(PISA)에 따르면 2015년 우리나라 학생의 수학 성적은 2012년을 기준으로 OECD 국가 중 가장 높았지만, 흥미도는 28위로 OECD 평균에 미치지 못했다(한국경제연구원, 2017). 또한 2015년 공식 초·중·고교 학생의 사교육 참여율은 67.8%로 사교육비 총 규모는 약 18조 1천 억원에 이르며 학생 1인당 월평균 사교육비¹⁾는 25만 6천원에 육박한다(통계청, 2017).

평가의 주요 목적은 학생 스스로 자신이 어느 정도 이해하고 있는지 파악할 수 있도록 도와주고, 부족한 부분에 대한 정보를 제공하여 학습 경험의 성장을 지원하는데 있다(교육과정평가원, 2015). 즉, 학교 교육에서 평가의 목표는 모든 학생들이 교과목의 성취 목표에 따라 내용을 숙달하였는지 파악하고 핵심역량을 기르는 데 도움을 주는 것이다.

학습의 목표가 되는 여러 가지 내용 요소들의 숙달 여부를 문항에 대

1) 학생 1인당 월평균 사교육비는 우리나라 초·중·고교 전체학생(사교육을 받지 않은 학생 포함)을 대상으로 한 평균 금액이다.

한 반응을 통해 검사하는 평가 방법 가운데 대표적인 것이 인지진단평가(Cognitive Diagnostic Assessment: CDA)이다 (Tatsuoka, 1983). 인지진단평가에 사용되는 인지진단모형(cognitive diagnosis model)은 검사를 통해 측정하려고 하는 특정 인지요소를 학생들이 숙달하였는지(mastery) 또는 숙달하지 못하였는지(non-mastery)에 대한 정보를 제공하는 이론이다. 인지진단모형은 개별 학생들의 학업 성취 수준을 점수나 등급 등의 종합적인 정보로 이해하기보다 검사에 의해 측정되는 특정 인지요소의 숙달 상태를 진단하고 학생과 교사, 학부모 등에게 교육적 피드백을 제공해준다(인보란, 2014). 여기에서 인지 요소(cognitive attribute)란 학생이 문항을 해결하는데 필요한 능력(ability), 기능(skills), 지식(knowledge), 인지과정(cognitive process)등을 통합하여 의미한다(Tatsuoka, 1983 ; 윤지영, 2016).

한편 수학교과와 중요한 특징은 위계적 성격을 가진다는 점이다. 한국과학창의재단(2014)에 의하면 위계성은 두 가지 측면으로 이해할 수 있다. 수학적 지식의 논리 선후 관계를 의미하는 계통성과 학습 과정에서의 학습의 선후 관계를 의미한다. 이러한 위계성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 명확하게 해 준다. 따라서 이러한 수학의 특성을 고려할 때 실제 학생들이 경험하는 학교 수학에서도 개념간의 계통성은 중요하게 고려되어야 한다. 인지진단평가 모형가운데 인지요소간의 위계를 설정한 요소 간 위계 방식(Attribute Hierarchy Method) 모형을 이용하면 이러한 위계성을 반영한 평가가 가능하다(Leighton et al., 2004). 검사를 통해 학생의 인지요소 숙달 여부를 추정하는 방법으로 문항반응이론(IRT), 인공신경망(Artificial Neural Network)등 여러 가지 통계적 모형이 사용되고 있다. 그 중 베이지안 네트워크(Bayesian Network)는 문항과 인지요소, 인지요소와 인지요소들 간의 위계적인 관계를 하나의 네트워크로 표현가능하며, 학생들의 문항에 대한 응답을 바탕으로 인지요소 숙달 확률이 계산이 되어 이를 바탕으로 학생 개개인의 인지진단 프로파일을 추출할 수 있는 통계적 모형이다.

그 동안 능력수준이 다양한 학생들에게 동일한 검사지로 일괄적인 검

사가 진행되는 전통적인 검사에 대한 제한점을 극복하기 위하여 적응성을 가진 검사가 시도되었으며 컴퓨터의 발달과 함께 그 시도는 본격화되었다(부재율, 2002). 검사방식으로 컴퓨터 적응 검사(Computerized Adaptive testing), 다단계 검사(Multi Stage Testing)등이 있다. 컴퓨터 적응 검사는 문항에 대한 학생들의 응답에 따라 문제은행 안에 있는 다음 문항이 제시되어 학생의 능력을 추정하는 방식으로 학생의 능력에 맞는 문제들이 검사 진행상황에서 제공된다. 그러나 응답한 내용의 수정이 불가능하고, 문항의 관리 및 노출 정도를 제어하기 어렵다는 단점이 있다(부재율, 2002). 이에 대한 대안으로 검사가 진행되기 전에 문항들을 모듈(Module)로 묶어 학생들의 문항에 대한 응답반응에 따라 다음 모듈을 제시하는 방식인 다단계검사가 제시되었다. 다단계 검사는 모듈 안에서 문항에 대한 수정 및 검토가 가능하며, 문항을 모듈로 제시하기 때문에 컴퓨터 적응 검사보다 문항을 관리하기가 쉽다(Duanli yan, 2014).

이에 본 연구에서는 수열의 개념과 관련된 선행요소에 대해 요소 간 위계방식(Attribute Hierarchy Method)에 다단계 검사 방식(Multi Stage Testing)과 베이지안 네트워크(Bayesian Network)를 적용한 인지진단평가를 하고자 한다. 위계를 가진 인지요소들을 군으로 묶어 그에 해당하는 문항들을 모듈로 선정하고 각 모듈마다 베이지안 네트워크를 적용하여 학생들의 능력을 추정하여 다음 모듈이 제시되는 방법이다. 이를 통해 학생 개개인은 수열 개념 이해에 있어 겪는 어려움이 어느 선행 요소의 이해 부족으로 인한 것인지 정보를 얻을 수 있을 것이며 이는 수학학습의 방향성을 알려주는 지표가 되어 학생들은 자기주도적 학습을 계획할 수 있도록 할 것이다. 또한 학생 전반의 인지상태에 대한 프로파일을 작성하여 학생의 인지적 강점과 약점에 대한 진단적 정보를 고려하여 효과적이고 실현 가능한 교수, 학습 방법에 도움을 줄 수 있을 것이다.

2. 연구의 목적 및 질문

본 연구의 목적은 컴퓨터를 활용하여 수학교과가 가진 위계적 성격을 반영한 적응적 인지진단평가를 수행하는 방법을 연구하는데 있다. 인지요소 간의 위계성을 구체화하며 학생의 인지상태에 대한 프로파일을 제공할 수 있는 평가 방법으로 다단계 검사방식(Multistage testing)과 베이저안 네트워크(Bayesian Network)를 결합한 요소 간 위계방식의 인지진단 평가의 적용 가능성을 알아보고자 한다. 또한 이를 이용하여 고등학교 수열 단원의 인지요소와 관련된 선행요소에 대한 인지진단평가 구성해보고 실제 학생들의 숙달 상황에 대해 알아보고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

1. 인지요소 위계를 고려한 다단계 인지진단 평가를 어떤 방법으로 수행할 수 있는가?
2. 인지요소 위계로 고려한 다단계 인지진단 평가를 수행하였을 때 그 효과는 어떠한가?
3. 인지요소 위계로 고려한 다단계 인지진단 평가를 고등학교 수열 단원의 평가에 적용하였을 때 학생들의 수열 단원의 내용 요소 및 선행요소의 숙달 상황은 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 인지요소위계를 반영한 인지진단검사

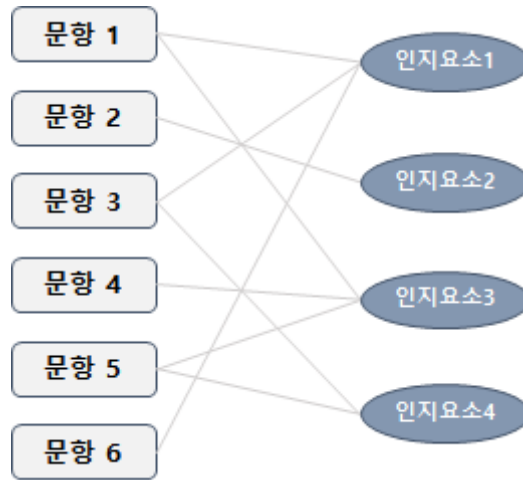
1. 1 인지진단 평가와 Q행렬

인지진단평가는 문항과 문항이 측정하는 인지요소들 사이의 관계를 통해 학생들의 문항에 대한 응답을 분석하여 개별 학생들의 인지 상태에 관한 프로파일을 제공해주는 통계적 모형에 기반을 두고 있다(김희경 외, 2013). 따라서 각 문항과 문항을 해결하기 위한 인지요소들 간의 관계를 나타내는 것이 중요하며, 이를 Q행렬로 정리할 수 있다(Tatsuoka, 1983).

Q행렬에서 행과 열은 각각 해당 문항과 해당 인지요소를 나타낸다. 문항이 K개, 인지요소가 n개라면 Q행렬은 $K \times n$ 행렬로 나타나며, 원소 q_{ij} 는 문항 i 를 해결하는데 인지요소 j 가 필요한 경우 1, 그렇지 않은 경우 0으로 표현된다.

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{문항 } i \text{를 해결하는데 인지요소 } j \text{가 필요한 경우} \\ 0 & \text{그렇지 않은 경우} \end{cases}$$

다음 [그림 II-1]은 문항과 인지요소의 관계를 나타내며 이를 토대로 <표 II-1>은 Tatsuoka(1983)의 Q행렬로 나타낸 예시이다.



[그림 II -1] 김희경(2013)이 제시한 문항과 인지요소 간 관계 예시

<표 II -1> 김희경(2013)이 제시한 문항과 인지요소 간 관계에 대한 Q행렬

	인지1	인지2	인지3	인지4
문항1	1	0	1	0
문항2	0	1	0	0
문항3	1	0	0	1
문항4	0	0	1	0
문항5	0	0	1	1
문항6	1	0	0	0

[그림 II -1]에서 문항1과 인지요소 1, 인지요소 3이 선으로 연결되어 있으므로 문항1을 해결하기 위해서는 인지요소 1과 인지요소 3이 필요하며 인지요소2와 인지요소 4는 필요하지 않음을 알 수 있다. 따라서 <표 II -1>의 1행에 $q_{11} = 1$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = 1$, $q_{14} = 0$ 임을 확인할 수 있다.

인지진단 모형은 현재 60개 이상의 모형이 개발되었으며 Rupp와 Templin(2008)은 다양한 모형을 몇 가지 분주로 분류하였다. 인지진단모형은 크게 비보상적모형(Nonompensatory model)과 보상적 모형(Compensatory model)으로 분류할 수 있다. 비보상적 모형이란 문항을

해결하는데 필요한 인지요소들을 모두 숙달해야만 정답을 맞힐 수 있다고 가정한다. 문항을 해결하는데 필요한 인지요소들 중 어느 하나라도 결여되어 있다면 다른 요소들의 숙달로는 결여된 요소가 보완되지 않는다. AHM(tatsuoka, 1983), the Deterministic Inputs, Noisy “And” Gate Model (DINA, Junker & Sijtsma, 2001), the Noisy Inputs, Deterministic And Gate Model (NIDA, Maris, 1999), fusion (Hartz, 2002), the Reparameterized Unified (Fusion) Model (RUM, DiBello, Stout, & Roussos, 1995) 등이 있다. 반대로 보상적 모형은 모든 인지요소들을 숙달하지 못하더라도 정답을 맞힐 수 있다고 보는 모형이다. 문항을 해결하는데 모든 요소들이 숙달되지 않더라도 다른 숙달된 요소들로 결여된 요소가 보완된다. the Deterministic Input, Noisy Or Gate Model(DINO,

Templin & Henson, 2006), the Noisy Inputs, Deterministic “Or” Gate Model(NIDO, Templin and Henson, 2006), compensatory reparameterized unified model(C-RUM, Hartz, 2002), the Log-linear Cognitive Diagnosis Model (LCDM) (Henson, Templin, & Willse, 2009, The Generalized DINA Model (G-DINA, de la Torre, 2011) 등이 있다. <표 II -2>는 인지진단모형을 분류한 표이다.

<표 II -2> 인지진단모형의 분류

비보상적 모형	보상적 모형
DINA	DINO
NIDA	NIDO
RUM	C-RUM
fusion	LCDM
AHM	G-DINA

인지진단모형 중 DINA모형과 Fusion모형은 주로 대단위 성취검사에 사용되며 문항의 정/오답 혹은 인지요소의 숙달/미숙달로 해석한다(이경

은, 2012). 비보상적 모형에 해당하는 DINA모형과 Fusion모형은 문항을 해결하기 위해 요구되는 인지요소들이 모두 숙달되어야만 정답을 맞힐 수 있다는 결합적 가정에 기초한다. 이러한 모형은 다른 모형들에 비해 수학적 모형이 비교적 간단하여 학생들의 인지요소의 숙달/미숙달을 해석하는데 용이하며 현재 가장 널리 사용되는 대표적인 인지진단모형이다.

DINA(Deterministic Input, Noisy “And” gate)모형은 Junker & Sijtsma(2001)에 의해 개발된 모형으로 학생의 문항에 대한 반응은 해당하는 인지요소를 숙달하고 있는지에 따라 결정된다고 가정한다(김희경, 2013). 학생의 실제 반응(observed response)과 기대할 수 있는 이상 반응(expected response)이 다를 수 있는데, 이탈(slip)과 추측(guess)두 가지 모수를 이용하여 설명한다. 이탈(slip)은 문항을 해결하는데 필요한 인지요소를 모두 숙달하여 정답으로 반응을 보일 것으로 예상하였으나 실제로는 오답의 반응을 보인 경우이며 반대로 추측(guess)은 문항을 해결하는데 필요한 인지요소를 숙달하지 못하여 오답으로 반응을 보일 것으로 예상하였으나 실제로는 정답의 반응을 보인 경우이다. DINA 모형에서 학생 j 가 문항 i 의 정답을 맞힐 확률은 다음의 식으로 표현한다.

$$P(X_{ij} = 1 | \alpha_j) = (1 - s_i)^{\eta_{ij}} g_i^{1 - \eta_{ij}}, \quad \eta_{ij} = \prod_{k=1}^K \alpha_{jk}^{q_{ik}}$$

q_{ik} 는 문항 i 를 해결하는데 인지요소 k 가 필요한지의 여부를 나타내는 것으로 Q행렬의 (i, k) 성분을 의미한다. 따라서 η_{ij} 는 학생 j 가 문항 i 의 정답을 맞히기 위한 모든 인지요소를 숙달했는지 여부를 나타낸다. 즉, η_{ij} 는 학생 j 가 문항 i 의 정답을 맞히기 위해 필요한 모든 인지요소를 숙달했다면 1, 하나라도 숙달하지 못했으면 0으로 표현된다. s_i 는 slip모수로 문항 i 를 해결하는데 요구되는 모든 인지요소를 숙달했음에도 불구하고 그 문항을 틀릴 확률이며, g_i 는 guessing 모수로 문항 i 의 풀이에 요

구되는 모든 인지요소를 숙달하지 못했음에도 불구하고 그 문항을 맞힐 확률을 나타낸다. X_{ij} 는 학생 j 가 문항 i 에 대한 응답으로 1은 정답, 0은 오답을 나타낸다. α_j 는 학생모수로서 학생 j 가 각 인지요소를 숙달했는지 나타내는 숙달벡터이며 α_{jk} 들을 벡터로 모은 것이다. 학생 j 가 인지요소 k 를 숙달했으면 $\alpha_{jk} = 1$, 숙달하지 못했으면 $\alpha_{jk} = 0$ 으로 나타낸다.

Fusion 모델은 Hartz(2002)가 개발한 모형으로 학생 j 가 문항 i 의 정답을 맞힐 확률은 다음과 같다.

$$P(X_{ij} = 1 | \alpha_j, \eta_j) = \pi_i^* \prod_{k=1}^K (r_{ik}^{*(1-\alpha_{jk}) \times q_{ik}}) P_{c_i}(\eta_j)$$

η_j 는 Q행렬 상에 명시된 인지요소로는 설명되지 않는 학생 j 의 잔여능력을 의미한다. 따라서 $P(X_{ij} = 1 | \alpha_j, \eta_j)$ 는 α_j 의 인지요소 숙달벡터를 갖고, η_j 의 잔여 능력을 갖는 학생 j 가 문항 i 의 정답을 맞힐 확률을 의미한다. 또한 π_i^* 는 문항 i 를 푸는데 요구되는 모든 인지요소를 숙달한 학생이 문항 i 의 정답을 맞힐 확률로 난이도를 의미한다. r_{ik}^* 은 인지요소 k 를 숙달했을 때 문항 i 의 정답을 맞힐 확률에 대한 인지요소 k 를 숙달하지 못했을 때 문항 i 의 정답을 맞힐 확률의 비율로 변별도를 의미하며 다음과 같다.

$$r_{ik}^* = \frac{P(Y_{ijk} = 1 | \alpha_{jk} = 0)}{P(Y_{ijk} = 1 | \alpha_{jk} = 1)}$$

c_i 는 Q행렬에 명시되지 않은 인지요소들에 얼마나 영향을 받는지를 나타낸 값이며 $P_{c_i}(\eta_j)$ 는 학생 j 가 Q-행렬에 명시되지 않은 인지요소들을 올바르게 적용할 확률이다. 다음 <표 II-3>는 Fusion모델과 DINA모델의 특징을 비교한 것이다(김희경 외, 2013).

〈표 II-3〉 DINA모델과 Fusion모델의 비교(김희경 외, 2013)

	DINA모델	Fusion모델
추정모수	* 문항모수: s_i (이탈), g_i (추측), c_i (Q행렬의 의존도)	* 문항모수: π_i^* (난이도), r_{ik}^* (변별도), c_i (Q행렬의 의존도)
	* 학생모수: α_j (인지요소 숙달 확률), η_j (문항 숙달여부)	* 학생모수: α_j (인지요소 숙달 확률), η_j (잔여능력)
서답형 문항처리	다분점수를 이분점수(0/1)로 리코딩하여 처리	서답형 문항의 다분 점수를 그대로 처리 가능
대단위 자료 적용 예시	* de la Torre(2008): NAEP	* Hartz(2002):
	* Chiu 외(2011): PIRLS	PSAT/NMSQT, CAT
		* Lee&Sawaki(2009):
		TOEFL iBT
		* Jang(2009): TOEFL

인지진단평가를 통해 학생의 각 인지 요소들에 대한 숙달 여부를 진단할 수 있으며 이는 학생과 교사에게 모두에게 유용한 정보로서 활용될 수 있다. 학생들은 자신이 숙달하지 못한 요소에 대해 알게 됨으로써 스스로 이후의 학습을 보다 효율적으로 계획하여 자기주도 학습이 일어날 수 있을 것이다. 교사에게도 학생들 전반의 인지상태에 대한 프로파일을 제공받을 수 있어 이후의 교수 방법 및 내용을 효과적으로 계획할 수 있다.

1. 2 요소 간 위계방식(Attribute Hierarchy Method, AHM)

요소 간 위계 방식(AHM)은 인지진단평가 중 인지요소들 간의 위계 구조를 반영하여 분석하기 위해 사용되는 방식으로 비보상적 모형에 해당한다. Tatsuoka의 규칙장 모형(Rule space model)의 확장으로, 관찰된 응답 패턴(observed response pattern)과 기대 응답 패턴(expected response pattern)을 비교하여 분류한다는 점에서 규칙장 모형과 유사하다. 그러나 요소들간의 의존성(dependency)을 허용하여 요소들이 위계적으로 관련되어 있음(attribute hierarchy)을 가정한다는 점이 규칙장 모형과의 차이점이다. Leighton et al.(2004)는 요소들 간의 위계를 사전에 설정하여 인지진단을 시행함으로써 인지상태를 잘 분석하기 위해서 위계 구조 설정의 중요성을 설명한다. Leighton et al.(2004)는 인지요소의 위계유형으로 다음의 [그림 II-2]의 4가지 유형을 제시한다. 차례대로 선형, 수렴형, 발산형, 비구조화이다. 각 요소들은 화살표로 연결되어 있으며 연결된 두 인지요소에 대해 이후의 인지요소의 숙달을 위해서는 이전의 인지요소의 숙달이 반드시 선행되어야 함을 의미한다.

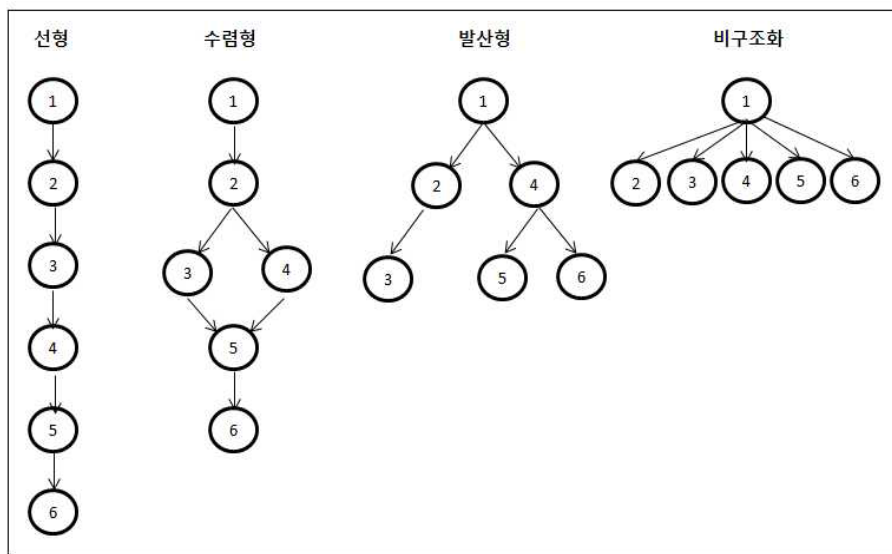
선형 구조는 모든 인지요소들이 하나의 경로에 순차적으로 나열된다. 인지요소 1은 인지요소 2의 선행요소이며, 인지요소 1, 2는 인지요소 3의 선행요소이다. 이는 인지요소 2를 숙달하기 위해서는 인지요소 1의 숙달이 반드시 선행되어야 함을 의미하며, 인지요소 3를 숙달하기 위해서는 인지요소 1, 2가 반드시 선행되어야 함을 의미한다. 따라서 인지요소 6을 숙달하기 위해서는 인지요소 1부터 인지요소 6까지 모두 숙달이 선행되어 있어야 한다.

수렴형 구조는 하나의 경로에서 다양한 조건의 인지요소들을 가진다. 인지요소 1에서 6까지 이르는 방법에 2가지 길이 존재한다. 따라서 인지요소 3과 인지요소 4를 숙달하기 위해서는 인지요소 2의 숙달이 선행조건이지만 인지요소 5를 숙달하기 위해서는 인지요소 3 또는 인지요소 4의 숙달이 선행되어 있어야 한다.

발산형 구조는 하나의 인지요소로부터 시작하여 다양한 경로를 가진

다. 따라서 인지요소 2와 인지요소 4를 숙달하기 위해서는 인지요소 1의 숙달이 선행되어 있어야 한다.

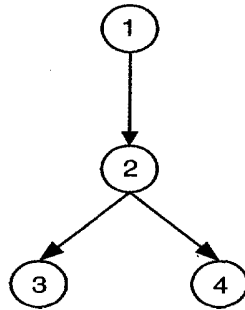
비구조화 구조는 하나의 인지요소가 하위 인지요소들에게 영향을 주는 구조이다. 따라서 인지요소 1의 숙달은 인지요소 2부터 인지요소 6까지의 숙달에 필수적이다. 또한 인지요소 2를 숙달했다는 것은 나머지 인지요소인 인지요소 2부터 인지요소 5의 숙달을 의미하는 것은 아니다.



[그림 II-2] 인지요소 위계 유형(Leighton et al, 2004)

기대응답패턴을 계산하기 위해서 요소 간 위계방식에서는 접속행렬 (incidence matrix), 축소된 Q행렬(reduced Q matrix) 등을 도입한다. [그림 II-3]의 상황을 고려하여 기대응답패턴을 계산해보자. [그림 II-3]는 [그림 II-2]의 위계 유형 중에서 2번째 수렴형의 일부이다. 인지요소들이 서로 독립이라고 가정할 때 모든 인지요소를 포함하지 않은 문항을 제외하고 가능한 문항의 개수는 $2^4 - 1$ 개다. 이 때, 인지요소와 문항의 조합을 나타낸 것을 접속행렬(Q 행렬)이라 한다. 행은 인지요소를 나타내고, 열은 각각의 문항을 나타내며 Q행렬은 각 문항을 맞추는데 필요한 인지

요소들의 조합을 나타낸다. [그림 II-3]의 Q행렬은 [그림 II-4]-(a)이다. 문항이 15개, 인지요소가 4개이므로 Q행렬은 4×15 행렬이며, 원소 a_{ij} 는 문항 j 를 해결하는데 필요한 인지요소가 a_i 이면 1, 그렇지 않은 경우는 0으로 표시한다. 1열의 경우를 보면, 문항 1번을 해결하기 위해서는 인지요소 1이 필요함을 의미한다. [그림 II-3]는 인지요소의 위계성을 나타내고 있으므로 이를 고려하면 가능한 인지상태의 조합이 줄어들게 된다. [그림 II-4]의 (a)에서 2열은 (0100)으로 표현할 수 있으며 이는 문항 2를 해결하는데 인지요소 2가 필요함을 의미한다. 그런데 [그림 II-4]의 위계 상황에서 인지요소 2는 반드시 인지요소 1의 숙달이 요구되므로 문항 2를 해결하기 위한 인지요소 조합은 문항 5번의 인지요소 조합인 (1100)과 일치하게 된다. 따라서 Q행렬에서 인지요소의 위계를 고려하면 동일한 인지요소 조합인 문항을 제거한 축소된 Q행렬을 얻게 된다. [그림 II-4]의 (b)로 표현된다. 가능한 인지요소의 조합에 해당하는 문항이 5개로 축소된 것이다. 이를 통해 [그림 II-3]의 위계구조를 따르는 요소들의 조합을 측정하기 위해서는 최소 5개의 문항이 필요함을 알 수 있다.



[그림 II-3] 인지요소 위계예시

(a) Q행렬	(b) 축소된 Q행렬
$Q = \begin{bmatrix} 1000111100011101 \\ 010010011011011 \\ 001001010110111 \\ 000100101101111 \end{bmatrix}$	$Q_r = \begin{bmatrix} 11111 \\ 01111 \\ 00101 \\ 00011 \end{bmatrix}$

[그림 II-4] [그림 II-3]의 Q행렬과 축소된 Q행렬

축소된 Q행렬을 통해 학생의 인지상태 조합에 따른 기대응답패턴을 구할 수 있다. 기대응답패턴이란 설정된 요소들의 위계가 참일 때, 보여질 수 있는 문항 반응 패턴이다. 예를 들어 인지상태가 (1000)인 학생은 인지요소 1만 필요한 문항1은 맞힐 수 있지만, 다른 인지요소가 필요한 나머지 문항은 맞힐 수 없을 것이라고 기대할 수 있으며 이에 대한 기대응답패턴을 10000이라 할 수 있다. <표 II-4>는 위 예시에서 기대응답패턴을 나타낸 것이다.

<표 II-4> [그림 II-3]의 기대응답패턴

학생	인지상태	기대응답패턴
1	1000	10000
2	1100	11000
3	1110	11100
4	1101	11010
5	1111	11111

요소간 위계 방식에서는 이러한 기대 응답 패턴과 학생들에게서 실제로 관찰된 응답 패턴을 비교하여 패턴을 분류(classify)하고 학생들의 인지요소 숙달 확률을 추정한다. 문항반응이론(IRT)에 기반의 방법, 인공신경망(artificial neural network)을 이용한 방법 등이 있다.

2. 베이저안 네트워크(Bayesian Networks, BNs)

베이저안 네트워크는 확률이론과 그래프이론이 적용된 통계적 도구이다(나선웅 외, 2012). 심리측정학(Psychometrics)의 발전과 함께 교육 검사의 실시 및 결과 분석에 활용되고 있으며 인지진단평가에 성공적으로 적용되고 있다(Levy & Mislevy, 2004; Sinharay & Almond, 2007; Almond et al, 2015 등).

교육 연구에서 베이저안 네트워크는 검사가 측정하고자 하는 인지요소와 검사 문항 등 분석 목적으로 고려할 수 있는 각 변수들을 노드(node)로 표현하며, 이러한 변수들 간의 관계를 화살표(arc)를 활용하여 방향성 비순환 그래프(directed acyclic graph)와 그에 대응하는 조건부 확률표(conditional probability table, CPT)로 나타낸다. 두 연결된 노드를 고려할 때, 화살표가 출발하는 쪽을 부모 노드(parent node) 그리고 화살표가 도달하는 변수를 자식 노드(child node)라고 부른다. 화살표는 속성들 간의 종속성(dependency)을 나타낸다.

베이저안 네트워크의 그래프 구조와 조건부 확률표가 주어져 있을 때, 베이저안 네트워크가 표현하는 변수들의 결합확률분포(joint probability distribution)는 다음과 같이 표현된다.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \text{Parent}(x_i))$$

여기서 x_1, x_2, \dots, x_n 은 특정 데이터의 속성 집합이고 $\text{Parent}(x_i)$ 는 x_i 의

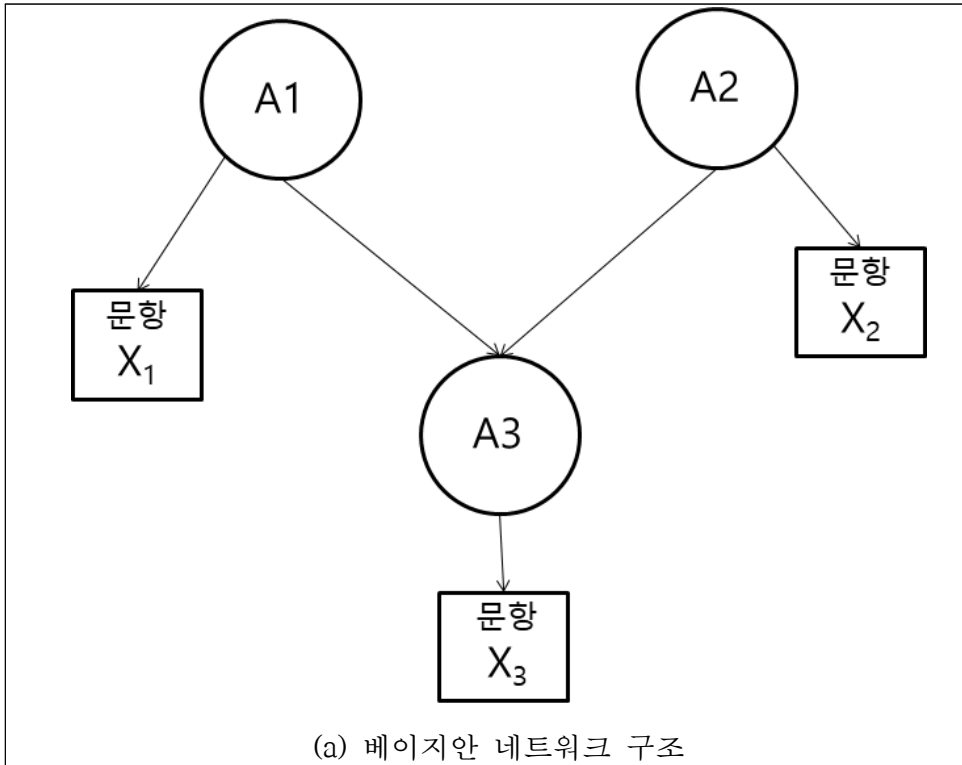
부모 노드들의 집합이다(김현미, 정성환, 2013).

베이지안 네트워크로 인지진단평가의 상황을 표현하면, 베이지안 네트워크의 각 노드는 데이터의 속성인 인지요소, 문항을 나타내며 인지요소의 숙달/미숙달, 문항에 대한 정답/오답은 노드의 상태(state)로 표현된다. 노드들을 연결하는 각 화살표는 인지요소 간의 관계, 또는 인지요소와 문항간의 관계를 나타낸다. 베이지안 네트워크의 그래프 구조에 따라 각 노드에는 조건부 확률표가 부여되는데, 어떤 인지요소를 나타내는 노드에 대응하는 조건부 확률표는 선행 인지요소를 숙달/미숙달 하였을 때 그 인지요소를 숙달/미숙달할 조건부 확률(conditional probability)을 표현하며(선행 인지요소가 없는 경우, 그 인지요소를 숙달/미숙달할 주변화 확률(marginal probability)을 표현), 문항을 나타내는 노드에 대응하는 조건부 확률표는 그 문항이 필요로 하는 인지요소들을 숙달했을 때/숙달하지 못했을 때 그 문항에 대한 정답/오답의 조건부 확률을 표현한다. [그림 II-5]는 인지요소 3개를 각각 측정하는 문항 3개로 구성된 인지진단평가를 베이지안 네트워크로 표현한 예이다.

베이즈 정리에 기반한 베이지안 추론을 위해서는 네트워크 구조와 조건부 확률표의 확률값들은 사전에 결정되어 있어야 한다. 이 값들은 모수 학습(parameter learning)을 통해 추정되거나 연구자가 이론적 근거를 통해 정하게 된다.

베이지안 추론의 목표는 경험적으로 얻어진 데이터를 바탕으로 사전(prior) 확률을 사후(posterior) 확률로 갱신(update)하는 것이다. 한 검사자의 문항에 대한 응답데이터가 베이지안 네트워크에 주어진다면, 이 정보와 사전에 설정된 조건부확률이 결합되어 이 검사자의 인지요소 숙달 확률이 갱신된다. 이렇게 갱신된 사후확률로부터 최종적으로 검사자의 인지요소 프로파일을 산출할 수 있다.

[그림 II-5]의 네트워크 구조와 조건부 확률표를 바탕으로 인지요소의 숙달확률을 계산해보자. 각각의 인지요소에 대해 숙달확률은 0.9로 설정되어있으며 인지요소 A3인 경우에는 위계성에 의해 인지요소 A1, 인지요소의 A2의 영향을 받는다. 따라서 인지요소 A1과 인지요소 A2 중 하



문항 X _i \ A1	미숙달	숙달
	오답	정답
오답	0.9	0.1
정답	0.1	0.9

(b) ‘인지요소 A_i → 문항 X_i’의 조건부 확률표($i=1,2,3$)

	A _i :미숙달	A _i :숙달
marginal probability	0.1	0.9

(d) 인지요소 A_i의 주변화확률($i=1,2$)

A1, A2 \ A3	미숙달	숙달
	미숙달	숙달
A1:미숙달, A2:미숙달	1	0
A1:미숙달, A2:숙달	1	0
A1:숙달, A2:미숙달	1	0
A1:숙달, A2:숙달	0.2	0.8

(c) ‘인지요소 A1, A2 → 인지요소 A3’의 조건부 확률표

[그림 II -5]베이지안 네트워크의 예

나라도 숙달하지 못했을 경우에는 인지요소 A3는 숙달하지 못한다. 인지요소 A1과 인지요소 A2를 모두 숙달하였을 때, 인지요소 A3를 숙달할 확률을 0.8로 설정되어있다. 또한 문항에 해당하는 인지요소를 숙달하였을 때 정답을 할 확률을 0.9, 숙달하지 못하였을 때 오답을 할 확률을 0.9로 설정되어있다. 검사가 시작되면 각 문항에 대한 정/오답 결과가 evidence(e)로 주어지며 사전에 설정된 사전확률을 바탕으로 각 인지요소의 숙달확률을 다음과 같이 계산한다.

$$P(A1, A2, A3 | X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3) = \frac{P(A1, A2, A3, X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)}{P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)}$$

e_i 는 문항 X_i 에 대한 반응을 나타내며 정답일 경우에는 $e_i = 1$, 오답일 경우에는 $e_i = 0$ 이다($i = 1, 2, 3$). 이 때, $P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3) = \sum_{A1, A2, A3} P(A1, A2, A3, X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)$$

따라서 인지요소별 숙달확률은 다음과 같이 계산된다.

$$P(Ai = 1 | X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3) = \frac{P(Ai = 1, X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)}{P(X_1 = e_1, X_2 = e_2, X_3 = e_3)}$$

($i = 1, 2, 3$)

만일 문항반응이 $X_1 = 1$ (정답), $X_2 = 0$ (오답), $X_3 = 1$ (정답)일 때, 인지요소 A1, A2, A3를 모두 숙달하지 못한 경우, 즉 A1=0, A2=0, A3=0으로 (0,0,0)일 경우에 다음과 같이 확률값이 계산된다.

$$\begin{aligned} & P(A1 = 0, A2 = 0, A3 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\ &= P(A1 = 0)P(A2 = 0)P(A3 = 0 | A1 = 0, A2 = 0)P(X_1 = 1 | A1 = 0)P(X_2 = 0 | A2 = 0)P(X_3 = 1 | A3 = 0) \\ &= (0.1)(0.1)(1)(0.1)(0.9)(0.1) = 0.00009 \end{aligned}$$

또한 인지요소 A1만 숙달한 경우, 즉 A1=1, A2=0, A3=0으로 (1,0,0)인 경우에 다음과 같이 확률값이 계산된다.

$$\begin{aligned} & P(A1 = 1, A2 = 0, A3 = 0, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\ &= P(A1 = 1)P(A2 = 0)P(A3 = 0 | A1 = 1, A2 = 0)P(X_1 = 1 | A1 = 1)P(X_2 = 0 | A2 = 0)P(X_3 = 1 | A3 = 0) \\ &= (0.9)(0.1)(1)(0.9)(0.9)(0.1) = 0.00729 \end{aligned}$$

총 8개의 인지요소의 조합이 가능하므로 각 경우에 따른 확률값은 <표 II-5>와 같다.

<표 II-5> 문항반응이 $X_1 = 1$ (정답), $X_2 = 0$ (오답), $X_3 = 1$ (정답)일 때
인지요소 조합별 $P(A1, A2, A3, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$

(A1, A2, A3)	$P(A1, A2, A3, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$
(0, 0, 0)	0.00009
(1, 0, 0)	0.00729
(0, 1, 0)	0.00009
(0, 0, 1)	0
(1, 1, 0)	0.001458
(1, 0, 1)	0
(0, 1, 1)	0
(1, 1, 1)	0.052488
총합	$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = 0.061416$

따라서 인지요소 A1, A2, A3의 숙달확률은 다음과 같다.

$$P(A1 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{P(A1 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}$$

$$= \frac{0.00729 + 0.001458 + 0 + 0.052488}{0.061416} = 0.9970691 \dots$$

$$P(A2 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{P(A2 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}$$

$$= \frac{0.00009 + 0.001458 + 0 + 0.052488}{0.061416} = 0.8798358 \dots$$

$$P(A3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{P(A3 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)}$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + 0.052488}{0.061416} = 0.8546307 \dots$$

A1을 측정하는 문항 X_1 의 정답을 맞혔기 때문에 A1의 숙달확률은 0.9보다 높아졌으며, A2를 측정하는 문항 X_2 의 정답을 맞히지 못하였기 때문에 A2의 숙달확률은 0.9보다 낮아진 것을 알 수 있다. 또한, A3를 측

정하는 문항 X_3 에는 정답을 하였지만 A2의 숙달확률이 낮아진 것이 A3의 숙달확률에도 영향을 미쳤기 때문에 결과적으로 A3의 숙달확률은 0.9보다 낮아진 것을 확인할 수 있다.

3. 컴퓨터 적응 검사(Computer Adaptive Test, CAT)

특히 교육 측정에서 검사자의 지식, 기술, 능력을 측정하는데 있어 지필평가가 주로 행해져왔다. 지필평가는 검사자들의 능력과 상관없이 다양한 난이도가 있는 모든 문항을 모든 검사자들이 수행해야 한다. 따라서 균일한 추정값을 얻기 위해서는 검사의 길이가 필연적으로 길어질 수밖에 없다. 또한 지필로 이루어지므로 장소와 시간에 구애받는다.

최근 몇십년동안 컴퓨터의 발전으로 이를 해결할 수 있는 검사 방법인 컴퓨터 적응 검사(CAT)가 시행되어져왔다. 컴퓨터 적응 검사(CAT)는 컴퓨터의 계산 능력을 바탕으로 검사이론이 더해져 발전된 검사방법으로, 각 검사자의 능력에 맞는 적절한 형태의 검사를 개별적으로 시행함으로써 짧은 시간안에 보다 적은 수의 문항으로 검사자의 능력을 측정하는 방법이다(Hambleton et al., 1993).

CAT는 검사자의 문항반응에 따라 사전에 구축된 문제은행에서 다음 문항이 제시되는 반복적인 과정이 진행되는 동안 검사자의 능력을 추정한다. CAT에서는 보통 중간정도 수준의 문항으로 검사가 시작되며 정답을 맞추게 되면 더 어려운 문항으로 그렇지 않으면 쉬운 문항이 제시된다(이혜옥, 2005). 따라서 CAT를 시행을 통해 검사자의 능력을 추정하기 위해서는 다양한 능력수준을 포함하는 다수의 질 높은 문항들을 확보하여야 한다. 이 때, 문항들을 담고있는 문제은행은 단순히 문항뿐만 아니라 문항의 형태, 통계적 정보(난이도, 변별도, 추측도와 같은 문항 모수치들) 등에 관한 문항 정보를 함께 개발해 저장되어 있어야 한다(Flaughner, 2000; 이혜옥, 2005).

CAT는 문항반응이론(IRT)의 원리에 의해 검사자의 능력 수준을 추정하

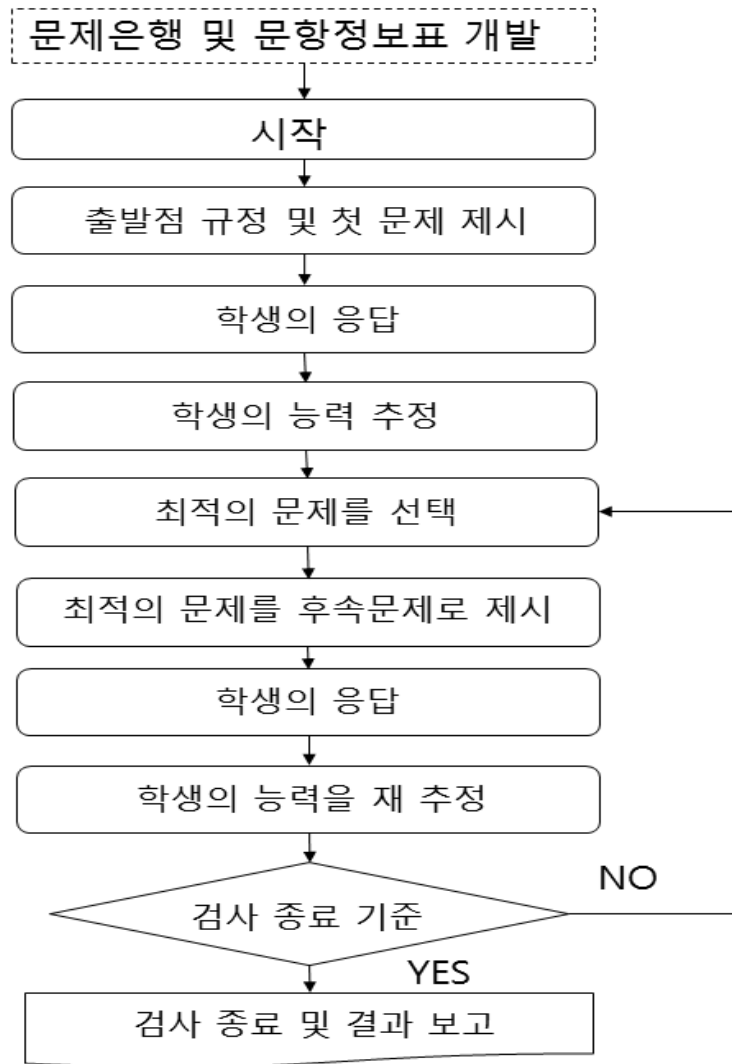
고, 이를 바탕으로 문제은행에서 검사자의 능력수준의 문항정보가 가장 많이 있는 문항을 제시한다. 문항정보를 측정함에 있어서 문항정보함수 (Information Function)를 사용하며 식은 다음과 같다. 이는 능력수준 θ_j 를 가지는 검사자의 문항 i 에 대한 문항의 변별도(a_i) 또는 문항의 답을 맞힐 확률 $P_i(\theta_j)$ 과 답을 맞히지 못할 확률의 곱 $Q_i(\theta_j)$ 인 $P_i(\theta_j)Q_i(\theta_j)$ 의 값에 영향을 받는다.

$$I_i(\theta) = a_i^2 P_i(\theta_j) Q_i(\theta_j) , \quad Q_i(\theta_j) = 1 - P_i(\theta_j)$$

일반적으로 검사가 종료되는 기준으로 측정의 표준오차를 사용하며 사전에 정해놓은 종료기준에 들어올 때 검사는 종료된다. 측정의 표준오차는 검사정보의 제공근에 반비례한다. 즉 검사의 정보가 많을수록 측정의 표준오차가 줄어든다. 측정의 표준오차식은 다음과 같다.

$$\text{측정의 표준오차} = \frac{1}{\sqrt{I_i(\theta)}}$$

[그림 II-6]은 CAT를 실시하기 위한 일반적인 순서도이다. 이처럼 개별적 검사인 CAT는 자신의 능력에 맞는 문항들로 구성됨으로 검사에 대한 동기부여를 높이고 흥미를 진작시키는 효과를 가져 온다. 또한 기존의 지필평가보다 적은 수의 문항으로 검사자의 능력을 보다 정확하게 측정한다(Weiss, 1982). 학력검사의 경우 기존의 지필평가보다 50% 정도의 문항수로도 같은 정도의 신뢰도를 유지할 수 있다(Koch, Dodd & Fitzpatrick, 1990). 또한 컴퓨터로 진행되므로 각 문항에 응답하는 속도, 문항의 정답 여부 등에 대한 즉각적인 피드백을 통해 완전학습을 위한 정보를 제공하는 효과가 있다.



[그림 II-6] CAT를 실시하기 위한 일반적인 순서도(부재율, 2002)

CAT는 학업 성취도나 적성 같은 인지적인 특성을 재고자 하는 검사에서 활발하게 사용되고 있다. 간호원 자격시험(NCLEX: Nurse Licensure Examination), 교사교육 프로그램에 입학하기 위한 기초능력 시험(PRAXIS: Professional Assessments for Beginning Teachers), 미국 해군 병사들의 직업적성을 측정하는 ASVAB검사, 미국임상병리학회 의학기술

자 자격시험 (MLT: Medical Laboratory Technician)등이 있다(부재율, 2002).

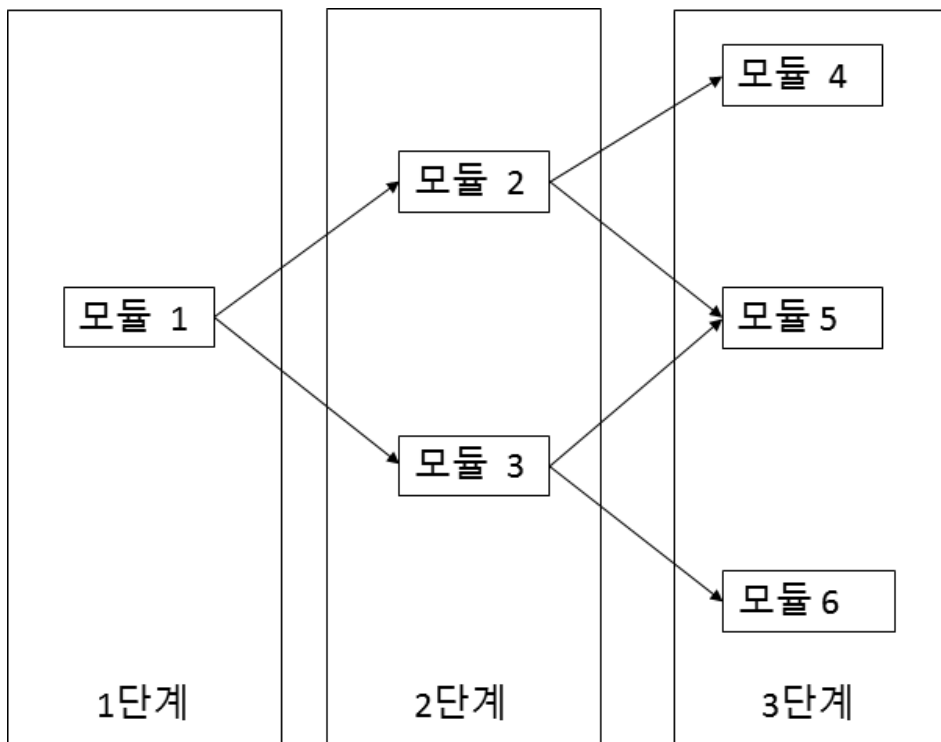
CAT의 제한점은 다음과 같다. 첫째, 문제 자체 오류의 심각성이다. 오류가 있는 문제가 학생마다 선택적으로 제시되어 공정성에 오점을 남길 수 있으며 이 문항에 대한 반응을 바탕으로 능력값을 추정하여 오차값을 추정하게 된다. 더욱이 이러한 오류가 발생했을 때, 검사를 다시 시작하는 것 이외에는 방법이 없다(부재율, 2002). 둘째, 응답한 내용의 검토 및 응답 내용의 수정이 불가능하다는 점이다. 문항 응답에 대한 수정 및 재검토의 기회가 없는 등 검사자가 문항을 통제할 수 없어 정서적 불안함으로 인해 능력이 잘못 추정될 수 있다. 셋째, CAT는 검사자마다 다른 문항이 제공됨으로써 어느 특정 검사자에게만 맥락효과가 발생할 수 있다는 점이다. 맥락효과란 이전에 제시되었던 문항이 이후의 문항을 해결하는데 있어 영향을 미치는 효과를 의미한다(Kingsbury & Zara, 1991). 넷째, CAT는 이론적으로 문제은행의 문항분포가 고르게 퍼져있음을 가정하여 진행된다. 그러나 실제로는 그렇지 못한 경우가 대부분이며 문항들마다 선택되는 빈도가 다르게 나타난다. 즉, 과다하게 제공이 되는 문항이 있는 반면, 거의 노출이 되지 않은 문항이 존재하게 된다. 따라서 동일한 문제은행에서 여러 수험자들이 동일한 문항에 정답을 맞췄다면 같은 문항이 제공될 확률이 높아 문항노출의 위험성이 있다(나선웅 외, 2012).

4. 다단계 검사(Multi-Stage Test, MST)

순차적 검사(sequential test)라고도 불리는 다단계검사는 검사자의 응답에 따라 사전에 미리 선정한 모듈이 제시되는 알고리즘이다. 모듈(module)은 문항들을 집합단위로 구성한 것으로, 하나의 단위로 관리되고 점수가 매겨진다. 한 모듈안의 문항들은 내용, 난이도 등을 고려하여 구성한다. 각 모듈단위로 능력 수준을 추정하며 이를 바탕으로 다음 단

계의 모듈이 제시된다.

[그림 II-7]은 다단계 검사 설계의 예시이다. 총 3단계로 이루어진 설계로써 1단계에는 1개의 모듈, 2단계에는 2개의 모듈, 3단계에는 3개의 모듈로 구성되어 있다. 모든 검사자들은 경로제시 시험(routing test)인 1단계의 모듈 1로 검사를 시작하고 모듈1의 응답 결과로부터 검사자들의 능력을 측정하여 2단계의 여러 다른 모델인 모듈2 또는 모듈 3의 문항들이 제시된다. 단계의 수와 단계 당 모듈의 수는 다단계 검사 설계에 따라 다양하게 설정할 수 있으며 측정시험(measurement test)이라고도 하는 마지막 단계의 모듈까지 시험을 마치게 되면 검사는 종료되고, 이를 토대로 검사자의 능력을 파악하게 된다.



[그림 II-7] 3단계로 구성된 다단계 검사 설계

다단계 검사를 구성하는 데 있어 고려해야할 요소는 모듈 구성, 단계

의 수, 한 단계 내의 모듈 수, 한 모듈 내의 문항 수 등이 있으며, 검사 진행이 있어서 능력을 추정하는 방법 및 추정된 능력을 바탕으로 다음에 제시될 모듈을 결정하는 방법 등이 고려되어야 한다. 모듈 구성은 검사를 구성하는데 있어 가장 중요한 결정 중에 하나이며 검사 개발자는 각 모듈의 난이도를 결정해야 한다. 또한 한 모듈 내의 문항수는 전체 검사의 길이나 단계의 수와 관련이 있다. 각 모듈마다 문항의 수가 많다면 전체 검사의 길이가 길어지게 되며, 검사의 길이가 정해진 경우라면 단계의 수에 따라 각 모듈내의 문항수가 정해지게 된다. Kim and Plake(1993)은 특히 1단계 모듈인 경로제시모듈이 문항을 많이 포함할수록 측정 오류를 줄여주며 보다 정확한 추정이 가능하게 하여 검사의 정확성을 높이는데 중요한 영향을 미친다고 하였다. 한 단계 내의 모듈 수는 검사자가 각 단계에서 선택가능한 모듈의 경우의 수이다. 대개 2단계, 3단계, 4단계 검사가 사용되고 있다. Patsula and Hambleton's(1999)는 단계의 수를 2개에서 3개로 증가시키면 추정의 오류를 줄여주며 단계 내의 문항 수 역시 3개에서 5개로 증가시키면 추정의 정확성이 증가함을 보였다. 즉, 단계의 수가 증가할수록, 단계 내의 문항 수가 증가할수록 정확한 추정이 가능해진다.

검사자의 모듈의 응답상황을 바탕으로 다음 단계의 모듈이 진행되는 과정을 정해야 하는데 이는 MST의 구성과 목적에 따라 달라진다. 다음 단계에서 검사자의 수준에 맞는 모듈이 제시되었는지 확인하는 방법은 주로 전 단계 모듈에서 검사자의 응답을 바탕으로 정보를 최대화하거나(maximizing information) 표준오차를 최소화(minimizing standard error)하는 방법을 통해 달성될 수 있다. MST는 적응검사이기 때문에 MST의 효율성 뿐만 아니라 다음 단계로 넘어가는 경로 규칙의 정확성이 요구된다. 현재 MST에서는 IRT방법을 주로 사용하며 각 문항의 불변하는 고유의 속성에 근거하여 그 속성을 나타내는 문항특성곡선(Item Characteristic Curve)을 사용하여 문항을 분석한다. 문항특성곡선은 검사자의 능력과 문항의 답을 맞힐 확률과의 함수관계를 나타내는 곡선으로 능력이 높을수록 문항의 답을 맞힐 확률이 높아지므로 증가함수로 나타

난다. 이 때, 모듈안의 문항들에 대한 검사자의 응답은 독립임을 가정하며 진행한다. Birnbaum(1968)은 3모수 로지스틱모형으로 문항에 대한 검사자의 반응을 예측하였다. 식은 다음과 같다.

$$P_i(\theta) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + \exp[-Da_i(\theta - b_i)]}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

문항 i 에 대하여 $P_i(\theta)$ 는 능력이 θ 인 검사자가 정답을 할 확률을 의미하며 a_i 는 변별도 모수, b_i 는 난이도 모수, c_i 는 추측모수로서 해당 문항에 대해 응답자가 추측으로 정답을 맞출 확률을 의미한다. n 은 검사의 문항 수를 의미하며 D 값은 로지스틱 함수가 누적정규분포 함수에 근접하게 하기 위한 조정 값으로, 1.702의 값을 갖는다.

검사자의 응답을 바탕으로 능력을 추정하는 방법에는 최대 우도 추정법(Maximum Likelihood estimation: ML), 최대 사후 추정법(Maximum A Posteriori estimation: MAP), 기대된 사후 추정법(Expected A Posteriori estimation: EAP)이 있다. MAP와 EAP에서는 능력의 사후 밀도(posterior density of θ)를 사용하기 때문에 베이즈 정리(Bayes's theorme)를 필요로 한다. ML은 문항의 정/오답의 결과를 바탕으로, 이러한 결과가 얻어질 가능성이 가장 높은 θ (능력모수치)의 값을 반복과정을 통해 구하는 방법이다. ML은 검사자가 문제를 모두 맞혔거나 혹은 모두 틀린 경우에는 추정값이 음수 무한대 혹은 양수 무한대로 나와 값을 구하는 것이 불가능하다는 단점이 있다. 베이지안 방법을 사용하는 MAP와 EAP는 이 점을 극복하여 추정값이 무한대로 구해지는 문제를 해결하였다. 그러나 베이지안 추정 방법은 사전 분포의 가정이 필요하며, 추정값이 사전분포의 평균 쪽으로 편향되어지는 편파성을 보인다는 단점이 있다(부재율, 2002).

이진홍(2009)에 의하면 다단계 검사(MST)가 실제로 적용된 예로 미국 법합 전문대학원 입학 시험(the Law School admission Test), 토플(the

Test of English as a Foreign Language), 미국 건축사등록위원회 자격시험(Architect Registration Examination), 미국 의사 자격시험(The U.S. Medical Licensure Examination), 미국 공인회계사 시험(the Uniform CPA examination)등이 있다.

Duanli yan(2014)은 다단계 검사(MST)의 장점을 다음과 같이 제시한다. 컴퓨터 적응 검사(CAT)는 문항별로 제시가 되는 반면에 다단계 검사에서는 사전에 만들어진 모듈이 검사자들에게 하나의 단위로 제시되기 때문에 CAT보다 문항의 질과 내용의 관리 및 문항의 노출 정도를 조절하는 등 문항을 관리하는데 용이하다. 그리고 모듈과 단계를 사용한다는 점에서 다단계 검사는 검사 개발자의 지식과 기술이 적응검사를 운영하는데 적용하는 것뿐만이 아니라 검사의 시행 과정에 대한 설계에서 중요한 역할을 하게 된다. 또한 다단계 검사는 검사자들에게도 장점이 있다. CAT와는 달리 검사자들은 모듈 내에서 문항을 건너뛰거나 문항의 순서를 바꿔서 응답할 수 있으며 다음 단계로 넘어가기 전에 문항을 검토하고 수정할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 검사 내용 및 검사 대상

이 연구의 목적은 컴퓨터를 활용하여 수학교과가 가진 위계적 성격을 반영한 적응적 인지진단평가를 수행하는 방법을 연구하는 데 있다. 수학 내용 중 수열은 함수와 관련된 여러 가지 문제 상황을 해결하는데 기본이 되는 개념이며 추후 극한, 미분법, 적분법을 학습하는데 바탕을 제공한다(교육과학기술부, 2011). 따라서 수열단원의 학습이 제대로 이루어지지 않았다면 후속 학습에 어려움을 제공할 수 있으므로 수열단원의 숙달 상황을 파악할 필요가 있다. 따라서 고등학교 수열 단원을 중심으로 수열 영역과 이에 관련된 선행요소에 대해 다단계 인지진단평가를 설계하고자 한다. 이를 위해 수열과 그 선행요소들을 추출하여 검사를 구성한다.

2009 개정 고등학교 수학과 교육과정에서 중 수열 단원은 수학Ⅱ 교과에 위치해있으며, 본 연구에서는 등차수열, 등비수열, 수열의 합 내용으로 한정한다. 현행 교육과정에서 수학Ⅱ는 고등학교 1학년 학생들이 2학기에 학습하는 과목이므로 수열 단원의 학생들의 인지적 요소 숙달 상황을 알아보기 위해서 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 검사를 실시한다. 미성년자이므로 학생과 학부모의 동의가 모두 이루어진 동의서가 회신된 경우에만 연구 참여대상으로 삼았다. 서울 소재의 고등학교 2학년 학생 9개 학급의 총 291명의 학생들을 대상으로, 학교 시설인 E-Room에서 컴퓨터를 사용하여 검사를 실시하였다.

2. 연구 절차

2. 1 수열의 개념과 선행인지요소

강현영(2007)에 의하면 패턴탐구를 통한 대수 및 함수의 도입은 미국, 영국, 호주를 비롯한 각국의 교육과정에서 나타나는 주요한 변화중 하나로 보고 있다. 최근 대수 교육과정은 패턴에서 출발하여 일반적인 규칙을 인식하고 일반화된 규칙을 설명하는 것이 하나의 제안으로 강조되고 있으며 우리나라도 7차 개정 교육과정에서부터 ‘규칙성과 함수’ 영역과 관련하여 초등학교 과정에서부터 다양한 패턴활동을 다루고 있다. 2009 개정에서도 ‘수와 연산’, ‘도형’, ‘측정’, ‘확률과 통계’, ‘규칙성’의 5개 영역으로 구성하여 규칙성을 하나의 영역으로 다루며 기초를 유지하고 있다. 학생들은 ‘규칙성’ 영역을 통해 패턴을 인식하게 되고 패턴을 언어적으로 표현하거나 기호로 간단히 나타내는 방법들을 연습한다. 2009 개정 교육과정에서 중학교 과정은 ‘수와 연산’, ‘문자와 식’, ‘함수’, ‘확률과 통계’, ‘기하’의 5개 영역으로 구성하고 있다. ‘함수’와 ‘문자와 식’ 영역을 통해 변수 개념과 함수 및 기술적 지식을 습득하며 이를 통해 고등학교 교육과정에서 수의 패턴을 인식하고 이를 대수식으로 간단하게 일반화 하는 방법을 익히게 된다.

현행 교육과정에서 수열은 고등학교 수학Ⅱ에 수열단원으로써 중단원으로 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을 다루고 있다.

현행 교과서(신항균 외, 2013)에서는 다음과 같이 차례로 나열된 수의 열을 수열이라 정의하고, 수열의 일반항은 항의 순서를 나타내는 자연수에 각 항이 대응하는 함수로 도입한다 ([그림 Ⅲ-1]).

한편 수열 $\{a_n\}$ 은 각 항의 번호에 그 항이 대응하는 함수로 생각할 수 있다.

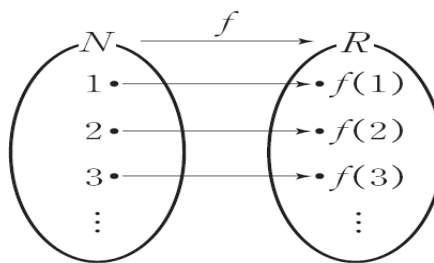
즉, 자연수 전체의 집합 N 을 정의역, 실수 전체의 집합 R 를 공역으로 하는 함수 $f: N \rightarrow R$ 를

$$f(n) = a_n$$

으로 정의하면

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots$$

이다. (신항균 외, 2013)



[그림 III-1] 함수를 통한 수열의 도입

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 등차수열, 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 정의하고 일반항, 부분합을 구하는 방법을 익힌다. 이후 부분합을 표현하는 또 다른 방법으로 \sum 도입하며 수학 기호의 편리성과 계산의 효율성에 대해 이해한다. 2009 개정 교육과정에서 수열단원의 내용체계는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 2009 개정 교육과정에서의 수열단원의 내용체계

영역	내용	영역성취기준
수열	등차수열과 등비수열	등차수열과 등비수열의 뜻을 알고, 수열의 합을 구할 수 있으며 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
	수열의 합	
	수학적 귀납법	

다음 <표 III-2>은 2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학Ⅱ의 수열 단원에 대한 교육과정 내용과 그에 따른 성취기준을 나타낸 것이다.

<표 III-2> 2009 개정 교육과정에서의 수열단원의 내용과 성취기준

영역	교육과정 내용	성취기준
등차수열과 등비수열	① 수열의 뜻을 안다.	수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.
	② 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	수학2312-1. 등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2312-2. 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
	③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. 수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
수열의 합	① \sum 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	수학2321. \sum 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.	수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
수학적 귀납법	① 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
	② 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.	수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
	③ 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.	

미국의 「학교수학 원리와 기준」에서 유아에서 12학년까지의 수학 프로그램을 통해 학생들이 습득하기를 기대하는 내용 영역과 과정 영역의 ‘기준’을 통합하여 제시하고 있다(황혜정 외, 2014). 수와연산, 대수,

기하, 측정, 자료의 분석과 확률로 내용영역의 기준을 나누었다. 그 중 수열과 관련된 대수 영역에 대한 하위 기준은 다음 <표 III-3>로 제시되었다.

<표 III-3> <Pre K-12>단계에 해당하는 대수 내용 영역의 기준(NCTM, 2000)

대수	<ul style="list-style-type: none"> • 규칙성, 관계, 함수를 이해한다. • 대수적 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석한다. • 수량적 관계를 표현하고 이해하는 데 수학적 모델을 사용한다. • 다양한 상황이나 맥락에서 변화를 분석한다.
----	---

현행 교육과정에서 수열을 학습하기 위한 선행요소를 NCTM 기준과 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 연계성을 바탕으로 확인해 볼 수 있다.

첫째, 규칙성 찾기이다. 초등학교 전반에 걸쳐 규칙성에 관해 학습한다. 학생들은 초등학교에서는 주로 크기, 위치, 방향, 색깔 등 다양한 형태의 패턴을 접하며 수, 말, 그림, 기호, 행동 등 다양한 방법으로 표현해보는 과정을 접한다. 이를 통해 패턴을 인식하고 언어적으로 표현하는 능력을 키운다. <표 III-4>는 초등학교 규칙성 내용체계를 보여준다.

〈표 III-4〉 초등학교 규칙성 내용체계

학년군	교육과정 내용	성취기준
1~2 학년군	규칙찾기	① 물체, 무늬, 수의 배열에서 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다. ② 자신이 정한 규칙에 따라 물체, 무늬, 수 등 을 배열할 수 있다.
3~4 학년군	규칙찾기	① 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하고, 그 규칙을 수나 식으로 나타낼 수 있다. ② 규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다.
	규칙과 대응	① 규칙 알아맞히기 놀이를 통하여 상대방이 정한 규칙을 추측하고 확인할 수 있다. ② 한 양이 변할 때 다른 양이 그에 종속하여 변하는 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾 아 설명하고, □ △를 사용하여 식으로 나타낼 수 있다.
5~6 학년군	정비례와 반비례	① 두 수 사이의 대응 관계는 x 와 y 를 사용하여 식으로 나타낼 수 있다. ② 정비례와 반비례의 관계를 이해하고, 그 관 계를 표나 식으로 나타낼 수 있다. ③ 실생활에서 정비례와 반비례의 관계의 예를 찾고, 이와 관련된 간단한 문제를 해결할 수 있 다.

둘째, 함수이다. 중학교 함수 영역과 고등학교 수Ⅱ에서 함수단원에서 학습한다. 함수의 도입을 통해 변수 개념을 이해한다. 강현영(2007)에 의하면 변수 개념이 확립되면, 학생들은 패턴을 일반화 하는 과정에서 사용하는 여러 전략과 표현방법에 대한 동치관계를 파악할 수 있게 되고 이는 추후 고등학교 수열 단원에서 일반항을 구하는 데 있어 대수식의 단순화에 대한 이해를 얻게 된다. 고등학교 수Ⅱ 과목의 내용체계는 ‘집

합과 명제’, ‘함수’, ‘수열’, ‘지수와 로그’이다. 이를 통해 수열을 함수로 정의하여 제시하고 있으므로 함수의 이해가 필수적임을 알 수 있다. <표 III-5>는 중학교 함수 내용체계를 보여준다.

<표 III-5> 중학교 함수 내용체계

학년군	교육과정 내용	성취기준
1~3 학년군	함수의 개념	① 다양한 상황을 표와 식으로 나타내고, 함수의 개념을 이해한다.
	순서쌍과 좌표	② 순서쌍과 좌표를 이해한다.
	함수의 그래프	③ 함수를 그래프로 나타낼 수 있다.
		④ 함수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	일차함수	① 일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다. ② 일차함수의 그래프의 성질을 이해한다. ③ 일차함수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	이차함수	① 이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다. ② 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

셋째, 기술적 지식이다. 중학교 문자와 식 영역에서 문자를 도입하며 문자의 유용성과 합리성을 이해한다. 또한 지수법칙, 다항식의 사칙연산의 학습을 통해 기술적 지식을 습득하게 된다. <표 III-6>은 중학교 문자와 식 내용체계를 보여준다.

〈표 III-6〉 중학교 문자와 식 내용체계

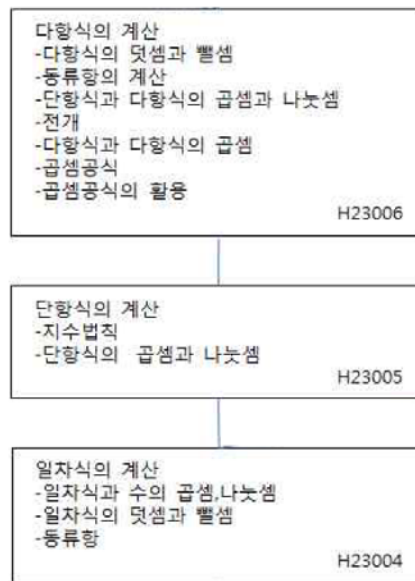
학년군	교육과정 내용	성취기준
1~3 학년군	문자의 사용과 식의 값	① 다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 간단히 나타낼 수 있다. ② 식의 값을 구할 수 있다.
	일차식의 덧셈과 뺄셈	① 일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
	지수법칙	① 지수법칙을 이해한다.
	다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈	① 이차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
		② 다항식의 곱셈의 원리를 이해하고, 곱셈 공식 유도할 수 있다.
		③ 다항식의 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다. ④ 간단한 등식을 변형할 수 있다.

2. 2 인지요소 추출 및 위계구조 설정

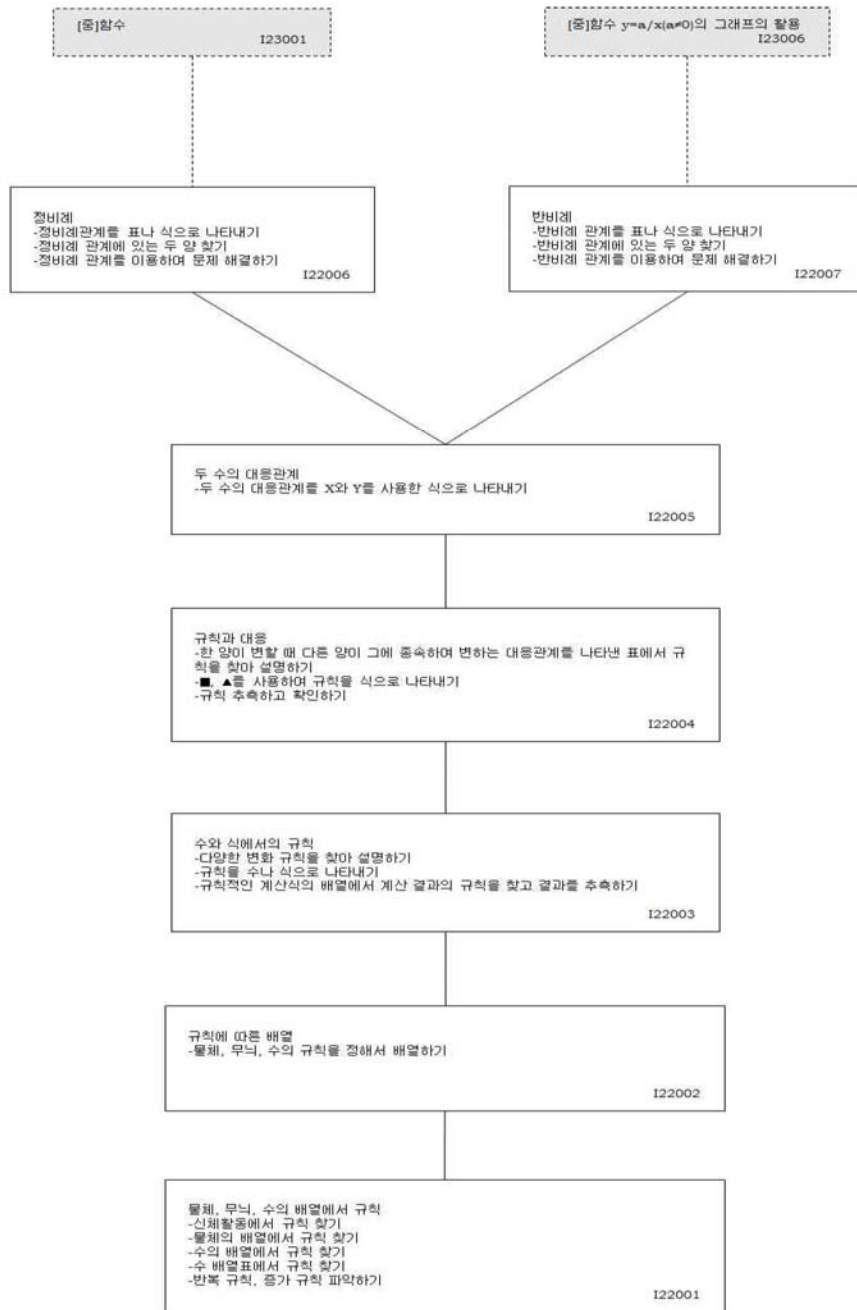
본 연구에서 인지요소는 수열단원 문제를 해결하는데 필요한 내용과 기능으로 고려하였다. 내용 계통을 파악하여 인지요소를 추출하고 위계구조를 설정하기 위해 현재 수학 교육과정과 교과서, 교사용 지도서 등을 분석하고, 수학 교육과정 내용 계통과 관련된 선행연구(한국과학창의재단, 2014)를 참고하였다.

한국과학창의재단(2014)에서 2009 개정 수학과 내용 성취기준에 근거하여 내용 요소를 선정하여 계통도를 작성하였다. [그림 III-2], [그림 III-3], [그림 III-4], [그림 III-5]은 각각 제시된 수열단원과 그와 관련된 내용 계통도이다. 계통도 작성의 다음의 규칙으로 작성되었다.

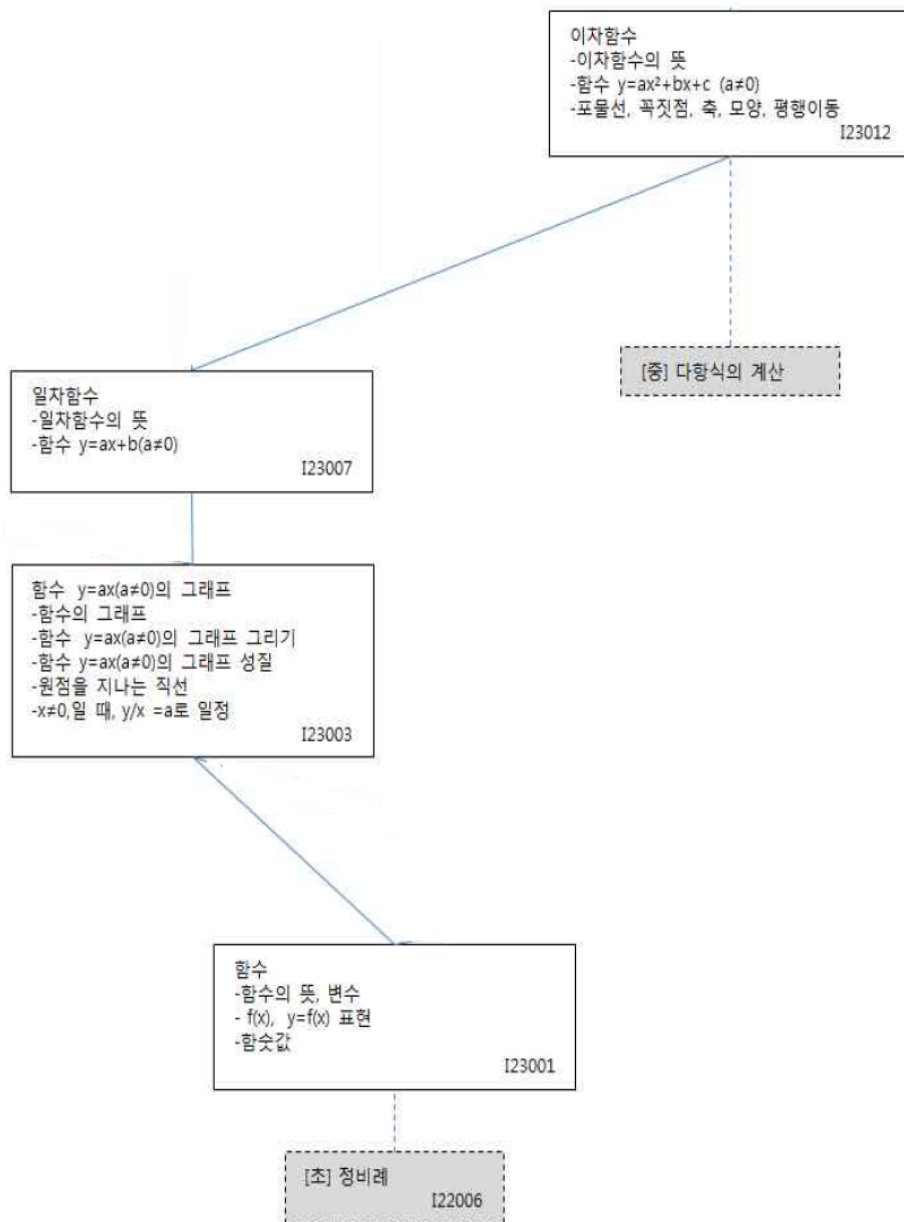
- 내용 요소 연결선은 실선으로 표시
- 직접적으로 관련이 되는 내용 요소만 연결
- 타 학교급, 타 영역과의 연계는 색칠된 점선 상자 속에 적은 후 점선 연결선으로 표시



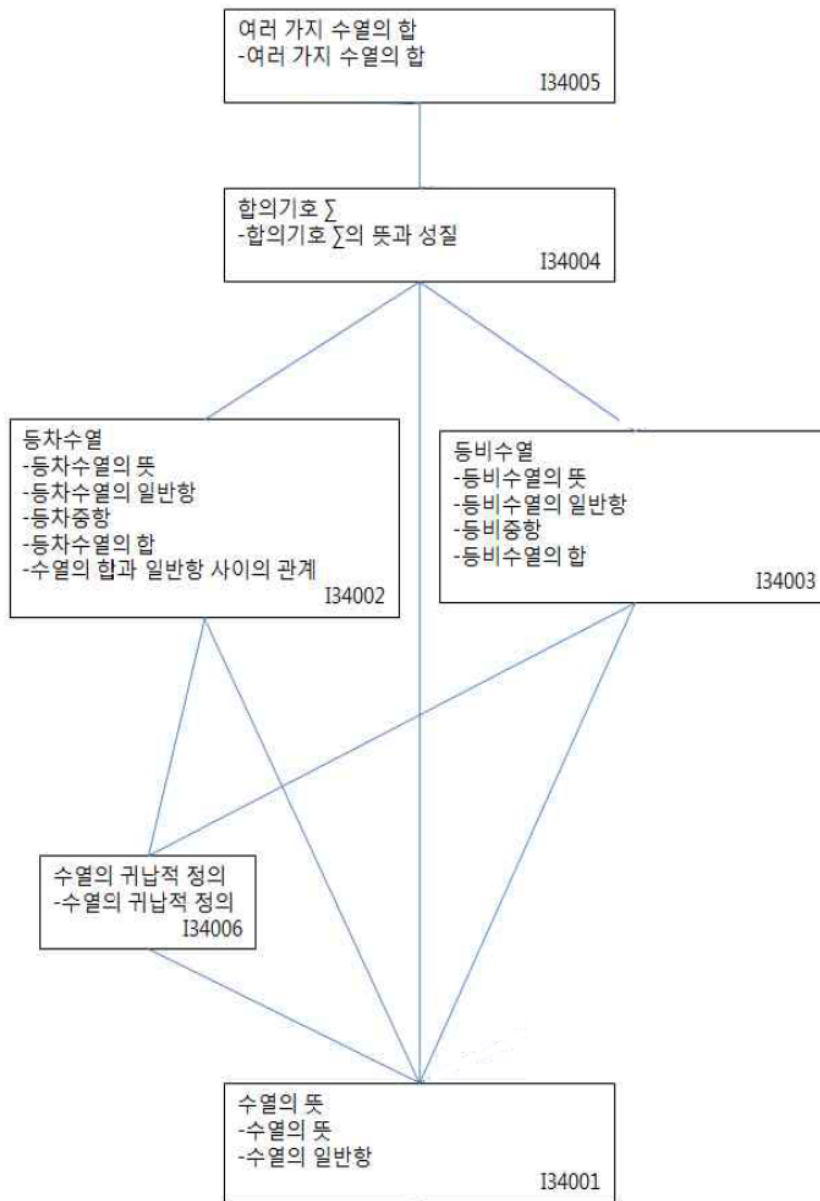
[그림 III-2] 수열내용과 관련된 중학교 문자와 식 영역 내용 계통도
(한국과학창의재단, 2014)



[그림 III-3] 수열내용과 관련된 초등학교 규칙성 영역 내용 계통도(한국과학창의재단, 2014)



[그림 III-4] 수열내용과 관련된 중학교 함수 영역 내용 계통도(한국과학창의재단, 2014)



[그림 III-5] 수열단원 내용 계통도(한국과학창의재단, 2014)

이를 바탕으로 전문가와 함께 수열 단원의 인지요소와 수열 단원과 계통을 이루는 인지요소와 위계구조를 추출하였다. 인지요소는 위계구조를 반영한 인지진단평가에서 인지요소의 숙달/미숙달을 판정하는데 적합하도록 보다 명확하게 정의할 수 있는 내용요소로 제한하여 생각하였다.

학교급별로 초등학교과정에서는 ‘수 배열의 규칙성’, ‘정비례’, ‘반비례’, 중학교과정에서는 함수 영역에서 ‘함수의 뜻’, ‘일차함수’, ‘이차함수’, 문자와 식 영역에서 ‘단항식의 계산’, ‘다항식의 계산’, 고등학교과정에서는 ‘수열의 뜻’, ‘등차수열의 일반항’, ‘등비수열의 일반항’, ‘등차수열의 합’, ‘등비수열의 합’, ‘수열의 합과 일반항 사이의 관계’, ‘ \sum 기호의 뜻과 성질’, ‘자연수 거듭제곱의 합’, ‘유리식의 합’, ‘유리식의 계산’으로 총 18개의 인지요소이다. <표 III-7>은 인지요소를 정리한 표이다.

인지요소 G1-1은 수 배열의 규칙성으로써, 그림, 규칙적인 계산식 배열 등 여러 가지 패턴을 통해 다양한 변화 규칙을 인식하고 규칙을 수나 식으로 나타낼 수 있는 능력을 의미한다.

인지요소 G2-2는 정비례로, 다양한 패턴 중 정비례 관계에 있는 두 양을 인식하고 이를 표나 식으로 나타낼 수 있는 능력이다.

인지요소 G3-3는 반비례로, 다양한 패턴 중 반비례 관계에 있는 두 양을 인식하고 이를 표나 식으로 나타낼 수 있는 능력이다.

인지요소 M1-1은 함수의 뜻으로, 변수의 의미를 이해하고 이를 바탕으로 두 변수 x, y 사이의 관계를 $y=f(x)$ 와 같이 표현하며 함수값을 구할 수 있는 능력이다.

인지요소 M1-2는 일차함수로, 일차함수를 나타낼 수 있는 다양한 예시를 통해 여러 가지 두 양 사이의 관계를 $y=ax+b(a \neq 0)$ 으로 표현할 수 있는 능력이다.

인지요소 M1-3는 이차함수로, 이차함수를 나타낼 수 있는 다양한 예시를 통해 여러 가지 두 양 사이의 관계를 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 으로 표현할 수 있는 능력이다.

인지요소 M2-1은 단항식의 계산으로, 단항식의 사칙연산과 지수법칙인 $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n)$, $a^m \div a^n = 1 (m = n)$, $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} (m < n)$, $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ 을 사용하여 계산할 수 있는 능력이다.

인지요소 M2-2는 다항식의 계산으로, 동류항의 의미를 이해하고 다항식의 덧셈과 뺄셈, 전개를 이용하여 다항식의 곱셈과 나눗셈을 계산할 수 있는 능력이다.

인지요소 H0는 유리식의 계산으로, 분모가 두 일차식의 곱으로 나타날 때, $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ 로 나타낼 수 있는 능력이다.

인지요소 H1-1은 수열의 뜻으로, 규칙성이 있는 수의 나열을 통해 수열의 의미와 일반항의 의미를 알고 주어진 항 사이의 규칙을 찾아 일반항을 구하거나 그 반대로 주어진 일반항을 통해 수열의 특징을 인식할 수 있는 능력이다.

인지요소 H1-2는 등차수열의 일반항으로, 규칙성이 있는 수열 중에서 연속하는 두 항의 차이가 모두 일정한 수열인 등차수열을 일반항으로 표현할 수 있고, 그 반대로 등차수열의 일반항을 보고 등차수열임을 파악할 수 있는 능력이다.

인지요소 H1-3는 등비수열의 일반항으로, 규칙성이 있는 수열 중에서 연속하는 두 항의 비가 모두 일정한 수열인 등비수열을 일반항으로 표현할 수 있고, 그 반대로 등비수열의 일반항을 보고 등비수열임을 파악할 수 있는 능력이다.

인지요소 H2-1는 등차수열의 합으로, 등차수열의 합 공식을 이해하고, 등차수열의 첫째항부터 n 항까지의 합을 구할 수 있는 능력이다.

인지요소 H2-2는 등비수열의 합으로, 등비수열의 합 공식을 이해하고, 등비수열의 첫째항부터 n 항까지의 합을 구할 수 있는 능력이다.

인지요소 H2-3은 수열의 합과 일반항 사이의 관계로, 등차·등비수열의 합으로부터 등차·등비수열의 일반항을 표현할 수 있는 능력이다.

인지요소 H3-1은 \sum 기호의 뜻과 성질로, 합의 기호 \sum 의 뜻과 표현 방법을 이해하고, \sum 의 성질인 $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$, $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$, $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ (단, c 는 상수), $\sum_{k=1}^n c = cn$ (단, c 는 상수)을 이용하여 계산할 수 있는 능력이다.

인지요소 H3-2는 자연수 거듭제곱의 합으로, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 을 이용하여 자연수 거듭제곱의 합을 구할 수 있는 능력이다.

인지요소 H1-2는 유리식의 합으로, $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ 를 사용하여 분모가 두 일차식의 곱으로 나타난 식의 합을 구할 수 있는 능력이다.

위에서 확정한 총 17개의 인지 요소들 간의 위계 구조는 다음 [그림 III-6]와 같다. 교육과정을 토대로 위계를 설정하였으며 3개의 영역으로 나누어 위에서부터 초등학교, 중학교, 고등학교 과정을 나타내었다. 각 사각형 안에는 인지요소를, 화살표는 두 요소간의 위계를 표현하였다.

교육과정에 따라 초등학교 과정, 중학교 과정, 고등학교 과정 순서대로 위계를 나타냈다. 초등학교 과정에서는 정비례, 반비례는 다양한 수 배열 중 특수한 상황이므로 수 배열의 규칙성(인지요소 G1-1)은 정비례(인지요소 G1-2), 반비례(인지요소 G1-3)의 선행요소로 볼 수 있다. 중학교 과정에서는 함수는 지도상의 강조점 및 유의점으로 “초등학교에서 배운 정비례 관계는 갖는 두 변수 x, y 가 함수임을 인식하며 자연스럽게 연계 되도록 한다”고 서술되어 있다. 이를 통해 정비례(인지요소 G1-2)는 함수의 뜻(인지요소 M1-1)을 학습하는데 필요한 선행요소이다. 함수의 뜻을 기반으로 일차함수(인지요소 M1-2)를 이해하고, 일차함수를 기반으로 이차함수(인지요소 M1-3)를 학습하므로 학습 순서에 따라 위계를 선정하였다. 또한 이차함수의 식을 다루는 데 있어 다항식의 사칙연산이 기술

적 지식으로 필요하므로 다항식의 계산(인지요소 M2-2)은 이차함수의 선행요소로 보았다. 다항식 중 항이 하나만 있는 간단한 형태가 단항식이므로 단항식의 계산(인지요소 M2-3)이 다항식의 계산의 선행요소로 볼 수 있다. 고등학교 과정에서는 수열에 대해 학습하게 된다. 먼저 수열은 함수를 기반으로 일반항 등 수열의 뜻을 학습하므로 함수가 수열의 뜻의 선행요소로 볼 수 있다. 이차함수가 함수 영역의 인지요소 중 마지막 단계의 인지요소 이므로 이차함수(인지요소 M1-3)를 수열의 뜻(인지요소 H1-1)의 선행요소로 보았다. 등차수열, 등비수열은 다양한 수열의 형태 중 특수한 상황이므로 수열의 뜻(인지요소 H1-1)은 등차수열의 일반항(인지요소 H1-2), 등비수열의 일반항(인지요소 H1-3)의 선행요소로 볼 수 있다. 등차수열의 합은 등차수열의 일반항으로부터 유도되므로 등차수열의 일반항(인지요소 H1-2)은 등차수열의 합(인지요소 H2-1)의 선행요소로 볼 수 있으며, 마찬가지로 등비수열의 일반항(인지요소 H1-3)은 등비수열의 합(인지요소 H2-2)의 선행요소로 볼 수 있다. 수열의 합과 일반항을 모두 숙달하고 있어야 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해할 수 있으므로 등차수열의 합(인지요소 H2-1)과 등비수열의 합(인지요소 H2-2)은 수열의 합과 일반항 사이의 관계(인지요소 H2-3)의 선행요소로 보았다. \sum 기호는 수열의 합을 표현하여 기호의 효용성을 인식하므로 수열의 합을 숙달한 후에 진행된다. 따라서 수열의 합과 일반항 사이의 관계(인지요소 H2-3)를 \sum 기호의 뜻과 성질(인지요소 H3-1)의 선행요소로 보았다. 이후 등차, 등비수열을 제외한 여러 가지 수열의 합에서는 자연수 거듭제곱의 합, 유리식의 합을 구하는 방법을 학습한다. 따라서 \sum 기호의 뜻과 성질(인지요소 H3-1)을 자연수 거듭제곱의 합(인지요소 H3-2)과 유리식의 합(인지요소 H3-3)의 선행요소로 볼 수 있다. 그런데 유리식의 합은 부분분수로의 변형을 통해 계산이 되므로 유리식 계산(인지요소 H0-1)을 유리식의 합(인지요소 H3-3)의 인지요소로 보았다.

<표 III-7> 수열에 관한 인지요소

인지요소	명칭	성취수준
G1-1	수 배열의 규칙성	다양한 변화 규칙과 대응표에서 대응 규칙을 찾아 설명하고 수나 식으로 표현할 수 있다.
G1-2	정비례	정비례와 반비례의 관계를 이해하고, 그 관계를 표나 식으로 나타낼 수 있다.
G1-3	반비례	
M1-1	함수의 뜻	다양한 상황을 표와 식으로 나타내고, 변수, 함수값 등 함수의 개념을 이해한다.
M1-2	일차함수	일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.
M1-3	이차함수	이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 이해할 수 있다.
M2-1	단항식의 계산	단항식의 사칙연산과 지수법칙의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
M2-2	다항식의 계산	다항식의 사칙연산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.
H0-1	유리식	유리식의 계산을 할 수 있다.
H1-1	수열의 뜻	수열의 뜻을 안다.
H1-2	등차수열	등차수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
H1-3	등비수열	등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.
H2-1	등차수열의 합	등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
H2-2	등비수열의 합	등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
H2-3	수열의 합과 일반항 사이의 관계	등차, 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해한다.
H3-1	\sum 의 뜻과 성질	\sum 의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
H3-2	자연수 거듭제곱의 합	자연수의 거듭제곱의 합을 구할 수 있다.
H3-3	유리식 합	일반항이 분수의 꼴이고, 분모가 두 일차식의 곱으로 나타나는 수열의 합을 구할 수 있다.

2. 3 다단계 검사를 위한 검사도구 제작

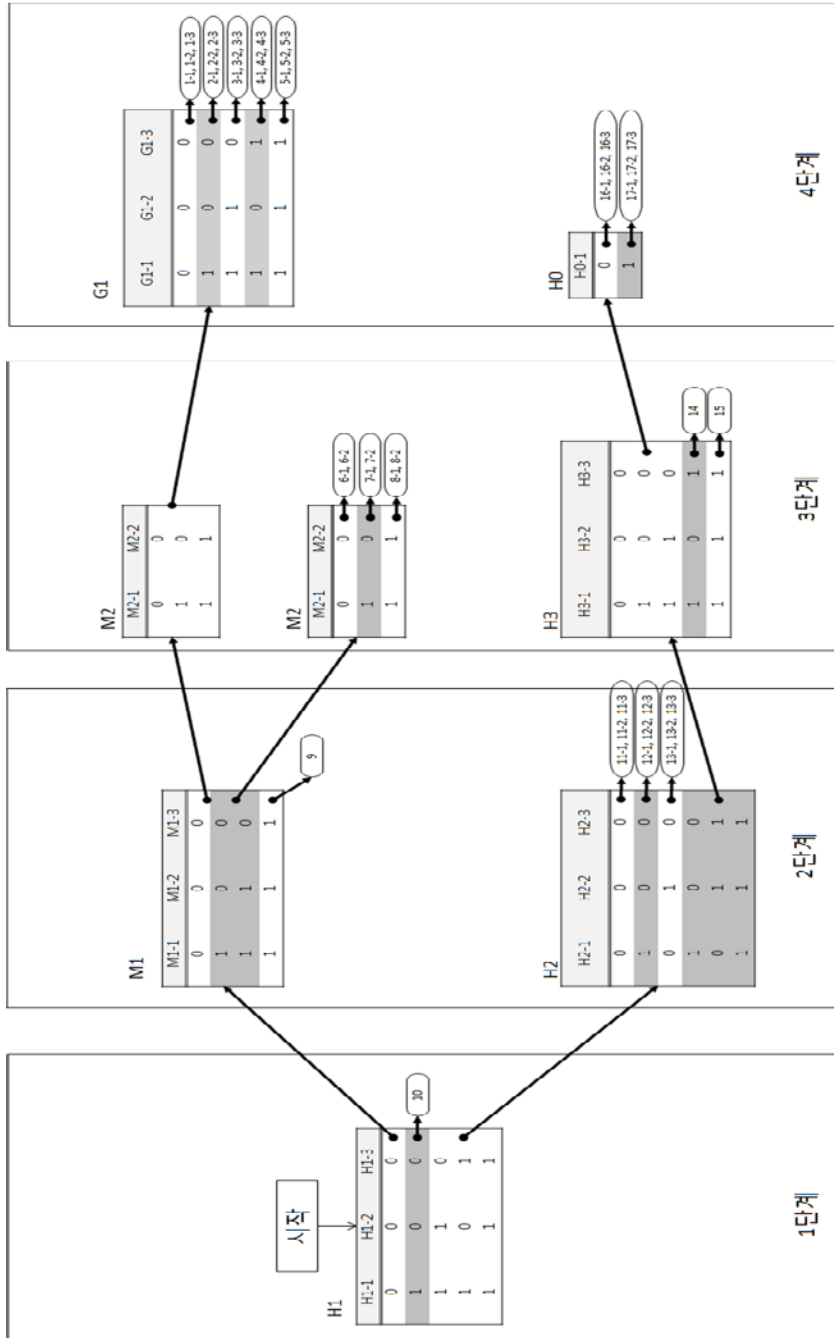
인지요소 간 위계를 반영한 다단계 검사를 시행하기 위해서는 인지요소들을 모듈로 설정해야 한다. 강현영(2007)에 의하면 수열은 패턴을 탐구하여 공통적인 규칙을 찾고 이를 서술하기 위하여 변수개념의 아이디어와 연결된다. 변수개념이 확립되면 패턴을 일반화하는 여러 표현들 사이의 동치관계를 파악할 수 있게 되며 이를 바탕으로 대수식의 단순화에 대한 아이디어를 얻는다. 전문가와 함께 선정된 인지요소와 그 위계 및 교육과정을 바탕으로 인지요소들을 묶어 여러 모듈을 선정했다.

다양한 형태의 패턴을 통해 패턴의 규칙을 찾고 다양한 방식으로 표현하는 패턴의 인식 및 언어적 표현모듈(G1)이다. 이는 초등학교 영역에서 학습되므로 G1에는 수 배열의 규칙성(인지요소 G1-1), 정비례(인지요소 G1-2), 반비례(인지요소 G1-3)의 인지요소가 포함된다. 변수의 도입을 통해 패턴의 규칙을 서술하는 다양한 표현들 사이의 동치관계를 인식하는 함수인식 모듈(M1)이다. 이는 중학교 함수 영역에서 학습하므로 M1에는 함수의 뜻(인지요소 M1-1), 일차함수(인지요소 M1-2), 일차함수(인지요소 M1-3)의 인지요소가 포함된다. 함수식을 다루는데 있어 문자가 있는 식의 사칙연산이 요구되므로 중학교 문자와 식 영역을 기술적 지식 모듈(M2)로 두었다. 따라서 M2에는 단항식의 계산(인지요소 M2-1), 다항식의 계산(인지요소 M2-2) 인지요소가 포함된다. 이를 바탕으로 고등학교에서 패턴의 일반화인 수열을 학습하며 수열 단원은 수열의 일반항, 수열의 합, 여러 가지 수열의 합으로 나눌 수 있으므로 수열의 일반항 모듈(H1), 등차·등비 수열의 합 모듈(H2), 여러 가지 수열의 합 모듈(H3) 인 총 3개의 모듈로 나누었다. 또한 여러 가지 수열의 합을 해결함에 있어 유리식의 계산요소가 필요하다. 유리식의 계산은 고등학교 수학Ⅱ의 유리함수 단원에서 학습하므로 유리식의 계산 모듈(H0)을 따로 두었다. 수열의 일반항 모듈(H1)에는 수열의 뜻(인지요소 H1-1), 등차수열의 일반항(인지요소 H1-2), 등비수열의 일반항(인지요소 H1-3) 인지요소가 포함된다. 등차·등비 수열의 합 모듈(H2)에는 등차수열의 합(인지요소 H2-1), 등비수

열의 합(인지요소 H2-2), 수열의 합과 일반항 사이의 관계(인지요소 H2-3) 인지요소가 포함된다. 여러 가지 수열의 합 모듈(H3)에는 \sum 기호의 뜻과 성질(인지요소 H3-1), 자연수 거듭제곱의 합(인지요소 H3-2), 유리식의 합(인지요소 H3-3) 인지요소가 포함되며 유리식의 계산 모듈(H0)에는 유리식의 계산(인지요소 H0-1) 인지요소가 포함된다.

검사의 알고리즘은 다음과 같다. 수열의 일반항 모듈인 H1에서부터 시작하여 학생의 응답에 따라 다음 단계가 결정된다. 1단계 시작모듈인 H1의 총 8문항의 반응을 바탕으로 인지요소의 숙달여부를 판정하고 다음 모듈로 이어지는 인지요소가 숙달이 되었다면 해당하는 다음 모듈 문항이 제시된다. 또한 숙달되지 않은 인지요소들이 선행모듈과 연결이 되어있다면 다음 모듈로 해당하는 선행모듈 문항이 제시된다. 즉, 모듈 H1에서 인지요소 H1-2 혹은 인지요소 H1-3이 숙달이 되었다고 판정한 경우에는 다음 단계인 H2모듈의 문항이 제시되며 인지요소 H1-1이 숙달되지 않았다고 판정한 경우에는 선행모듈인 M2모듈 문항이 제시되는 형식이다. 그런데 다음단계로 진행되어야 하는 선행모듈의 후보가 2개 이상이 있는 경우가 있다. 이런 상황에서는 우선순위를 정하여 먼저 제시되는 모듈을 설정한다. 본 연구에서는 M1모듈에서 인지요소 M1-1과 인지요소 M1-3이 숙달되지 않은 경우에 모듈 M2와 모듈G1의 문항을 해결해야 하는 경우에 해당한다. 이 경우에 모듈M2는 수열을 해결하기 위한 기술적 영역이므로 먼저 개념에 해당하는 모듈G1 문항이 제시된 후 모듈 M2문항이 제시되도록 하였다. 다음단계로 진행하는 후보군이 더 이상 없으면 평가는 종료되며 진행된 평가 모듈을 종합적으로 인지진단이 다시 한 번 이루어지게 된다. 따라서 학생마다 다른 모듈이 제시되며, 진행되는 모듈의 수도 다르다. 1단계에서 평가가 종료되는 학생도 있으며 최대 4단계까지 평가가 진행될 수 있다. [그림 III-7]은 본 연구의 다단계 검사 설계이다. 모듈별로 위계를 고려하여 인지요소를 숙달하면 1, 숙달하지 못하면 0으로 표현하였으며, 화살표로 모듈별 위계관계를 나타내었다. 또한 인지진단 검사가 종료되는 각 시점마다 원 안에 번호를 적어 표현하였

다.



[그림 III -7] 다단계 검사 설계

<표 III-8>은 다단계 검사가 종료된 시점마다 판정결과를 정리한 표이다. 종료된 시점마다 숙달한 인지요소와 판정결과를 나타내었다. 모듈안의 모든 인지요소를 숙달하였을 경우 숙달한 인지요소를 모듈로 표현하였다.

<표 III-8> 본 연구의 판정결과

번호	숙달된 인지요소	판정결과
1-1	숙달요소 없음	초등영역의 수의 배열에서 규칙성을 찾는것부터 천천히 공부해봅시다.
1-2	M2-1	초등영역의 수의 배열에서 규칙성을 찾는 것부터 천천히 공부해봅시다. 지수법칙, 단항식의 사칙연산은 잘 숙달하고 있습니다.
1-3	M2	초등영역의 수의 배열에서 규칙성을 찾는 것부터 천천히 공부해봅시다. 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다.
2-1	G1-1	초등영역의 수의 배열에서 규칙성은 잘 이해하나 정비례, 반비례의 이해가 필요합니다. 이를 바탕으로 추후 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 단항식과 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
2-2	G1-1, M2-1	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 중학교 영역의 단항식의 계산(지수법칙, 단항식의 사칙연산)은 잘 숙달하고 있습니다.
2-3	G1-1, M2	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 정비례, 반비례의 이해와 함께 추후 중학교 영역의 함수의 이해를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
3-1	G1-1, G1-2	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 정비례를 잘 숙달하고 있습니다. 반비례의 이해를 보충하고, 추후 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 단항식과 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
3-2	G1-1, G1-2, M2-1	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 정비례, 중학교 영역의 단항식의 계산(지수법칙, 단항식의 사칙연산)은 잘 숙달하고 있습니다. 반비례의 이해와 함께 추후 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
3-3	G1-1, G1-2, M2	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 정비례, 중학교 영역의 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 반비례의 이해와 함께 추후 중학교 영역의 함수의 이해를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
4-1	G1-1, G1-3	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 반비례를 잘 숙달하고 있습니다. 정비례의 이해를 보충하고, 추후 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 단항식과 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
4-2	G1-1, G1-3, M2-1	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 반비례, 중학교 영역의 단항식의 계산(지수법칙, 단항식의 사칙연산)은 잘 숙달하고 있습니다. 정비례의 이해와 함께 추후 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.

4-3	G1-1, G1-3, M2	초등영역의 수의 배열에서 규칙성과 반비례, 중학교 영역의 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 정비례의 이해와 함께 추후 중학교 영역의 함수의 이해를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
5-1	G1	초등영역은 잘 숙달하고 있습니다. 중학교 영역의 공부(함수의 이해, 단항식과 다항식의 계산)를 통해 기본을 익힌 후 수열 학습이 필요합니다.
5-2	G1, M2-1	초등영역과 중학교 영역의 단항식의 계산(지수법칙, 단항식의 사칙연산)은 잘 숙달하고 있습니다. 중학교 영역의 함수를 이해하여 기본을 다진 후 수열 학습이 필요합니다.
5-3	G1, M2	초등영역과 중학교 영역의 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 중학교 영역의 함수를 이해하여 기본을 다진 후 수열 학습이 필요합니다.
6-1	G1, M1-1	초등영역과 중학교 영역의 함수의 뜻은 잘 숙달하고 있습니다. 일차함수부터 함수를 이해하고 문자가 들어간 식의 계산연습(지수법칙, 단항식과 다항식의 사칙계산)을 바탕으로 수열 학습이 필요합니다.
6-2	G1, M1-1, M1-2	초등영역과 중학교 영역의 함수의 뜻, 일차함수는 잘 숙달하고 있습니다. 이차함수부터 함수를 이해하고 문자가 들어간 식의 계산연습(지수법칙, 단항식과 다항식의 사칙계산)을 바탕으로 수열 학습이 필요합니다.
7-1	G1, M1-1, M2-1	초등영역과 중학교 영역의 함수의 뜻, 단항식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 이차함수부터 함수를 이해하고 다항식의 계산연습을 바탕으로 수열 학습이 필요합니다.
7-2	G1, M1-1, M1-2, M2-1	초등영역과 중학교 영역의 함수, 단항식의 계산(지수법칙, 단항식의 사칙연산)은 잘 숙달하고 있습니다. 이차함수의 이해와 다항식의 사칙연산을 좀 더 학습한 후 수열 학습이 필요합니다.
8-1	G1, M2, M1-1	수열에 관련된 초등영역과 중학교 영역의 함수의 뜻과 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 일차함수부터 함수를 이해하여 기본을 다진 후 수열 학습이 필요합니다.
8-2	G1, M2, M1-1, M1-2	수열에 관련된 초등영역과 중학교 영역의 일차함수 및 단항식의 계산, 다항식의 계산 등 문자를 포함한 식의 계산은 잘 숙달하고 있습니다. 중학교 영역의 이차함수를 이해하여 기본을 다진 후 수열 학습이 필요합니다.
9	G1, M1, M2	수열에 관련된 중학교 영역까지 숙달이 잘 되어있습니다. 수열에 대한 학습이 필요합니다.
10	G1, M1, M2, H1-1	수열의 뜻은 잘 이해하고 있습니다. 이를 바탕으로 등차수열, 등비수열의 일반항을 구하는 방법부터 학습이 필요합니다.
11-1	G1, M1, M2, H1-1, H1-2	수열의 뜻과 등차수열의 일반항까지 잘 이해하고 있습니다. 등비수열과 수열의 합 등에 대한 학습이 필요합니다.
11-2	G1, M1, M2, H1-1, H1-3	수열의 뜻과 등비수열의 일반항까지 잘 이해하고 있습니다. 등차수열과 수열의 합 등에 대한 학습이 필요합니다.
11-3	G1, M1, M2, H1	수열의 뜻과 등차, 등비수열의 일반항까지 잘 이해하고 있습니다. 등차, 등비수열의 합부터 학습이 필요합니다.
12-1	G1, M1, M2, H1-1, H2-1	수열의 뜻과 등차수열의 일반항, 등차수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등비수열과 수열의 합에 대한 학습이 필요합니다.
12-2	G1, M1, M2, H1, H2-1	등차, 등비수열의 일반항과 등차수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등비수열의 합부터 학습이 필요합니다.

12-3	G1, M1, M2, H1, H2-1	등차, 등비수열의 일반항과 등차수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등비수열의 합부터 학습이 필요합니다.
13-1	G1, M1, M2, H1, H2-2	등차, 등비수열의 일반항과 등비수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등차수열의 합부터 학습이 필요합니다.
13-2	G1, M1, M2, H1, H2-1, H2-2	수열의 뜻과 등비수열의 일반항, 등비수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등차수열과 수열의 합에 대한 학습이 필요합니다.
13-3	G1, M1, M2, H1, H2-1, H2-2	등차, 등비수열의 일반항과 등비수열의 합은 잘 이해하고 있습니다. 등차수열의 합부터 학습이 필요합니다.
14	G1, M1, M2, H0, H1, H2, H3-1, H3-3	등차, 등비수열의 일반항과 합, 시그마 기호를 잘 이해하고 있습니다. 여러가지 수열의 합 중 자연수 거듭제곱의 합에 대한 학습이 필요합니다.
15	G1, M1, M2, H0, H1, H2, H3	수열을 잘 이해하며 숙달하고 있습니다.
16-1	G1, M1, M2, H1 H2	등차, 등비수열의 일반항과 수열의 합 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 잘 이해하고 있습니다. 시그마 기호의 이해부터 학습이 필요합니다.
16-2	G1, M1, M2, H1 H2, H3-1	등차, 등비수열의 일반항과 수열의 합, 시그마의 기호를 잘 이해하고 있습니다. 여러가지 수열의 합에 대한 학습이 필요합니다.
16-3	G1, M1, M2, H1 H2, H3-1, H3-2	등차, 등비수열의 일반항과 합, 시그마 기호를 잘 이해하고 있습니다. 여러가지 수열의 합 중 유리식의 합에 대한 학습이 필요합니다. 이를 위해서 유리식의 계산을 연습이 필요합니다.
17-1	G1, M1, M2, H1 H2, H0	등차, 등비수열의 일반항과 수열의 합 및 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 잘 이해하고 있습니다. 시그마 기호의 이해부터 학습이 필요합니다. 유리식의 계산은 잘 숙달되어 있습니다.
17-2	G1, M1, M2, H1 H2, H0, H3-1	등차, 등비수열의 일반항과 수열의 합, 시그마의 기호 및 유리식의 계산을 잘 숙달하고 있습니다. 여러가지 수열의 합(자연수 거듭제곱의 합, 유리식의 합)에 대한 학습이 필요합니다.
17-3	G1, M1, M2, H1 H2, H0, H3-1, H3-2	등차, 등비수열의 일반항과 수열의 합, 시그마의 기호 및 자연수의 거듭제곱의 합을 잘 숙달하고 있습니다. 여러가지 수열의 합 중 유리식의 합에 대한 학습이 필요합니다. 유리식의 계산은 잘 숙달되어 있습니다.

학생은 최대 4단계의 모듈을 경험할 수 있으므로 검사지는 수업 한 시수(고등학교 기준 50분)안에 마칠 수 있도록 인지요소와 단계의 수를 고려하여 구성하였다. 본 연구에서 설정한 인지요소들을 충실히 잘 측정할 수 있는 문항을 선정하기 위해 여러 교과서를 참고하여 검사지를 작성하였으며, 진단평가의 취지에 맞도록 대체로 평이한 문항으로 구성하였다. 또한 검사가 종료된 이후에 판정결과분석과 함께 인지요소 위계 그림을 제공하여 본인의 숙달 상황을 글과 그림으로 확인할 수 있도록 하였으며, 이후 구글 폼을 통해 다단계 검사에 대한 설문조사를 시행하였다.

검사지를 완성한 후, 학생들의 응답을 분석하는데 필요한 Q행렬을 제

작하였다. Q행렬은 인지진단모형을 적용하기 위해 문항과 인지요소의 관계를 표현한 것으로서 $K \times n$ 행렬(K =문항수, n 은 인지요소 수)로 나타나며, 원소 q_{ij} 는 문항 i 를 해결하는데 인지요소 j 가 필요한 경우 1, 그렇지 않은 경우 0으로 표현된다. 전문가의 도움을 받아 검사지를 바탕으로 각 모듈별 Q행렬의 최종안을 개발하였다. <표 III-9>는 G1, M1, M2, H1, H2, H3, H0모듈의 Q행렬 최종안을 나타낸 것이다.

<표 III-9> G1, M1, M2, H1, H2, H3, H0모듈의 Q행렬 최종안

	G1-1	G1-2	G1-3
문항1	1	0	0
문항2	1	0	0
문항3	1	1	0
문항4	1	1	0
문항5	1	0	1
문항6	1	0	1
(a) G1모듈의 Q행렬 최종안			
	M1-1	M1-2	M1-3
문항1	1	0	0
문항2	1	0	0
문항3	1	0	0
문항4	1	1	0
문항5	1	1	0
문항6	1	1	1
문항7	1	1	1
문항8	1	1	1
(b) M1모듈의 Q행렬 최종안			

	M2-1	M2-2
문항1	1	0
문항2	1	0
문항3	1	0
문항4	1	1
문항5	1	1

(c) M2모듈의 Q행렬 최종안

	H1-1	H1-2	H1-3
문항1	1	0	0
문항2	1	0	0
문항3	1	1	0
문항4	1	1	0
문항5	1	1	0
문항6	1	0	1
문항7	1	0	1
문항8	1	0	1

(d) H1모듈의 Q행렬 최종안

	H2-1	H2-2	H2-3
문항1	1	0	0
문항2	1	0	0
문항3	0	1	0
문항4	0	1	0
문항5	1	1	1
문항6	1	1	1

(e) H2모듈의 Q행렬 최종안

	H3-1	H3-2	H3-3
문항1	1	0	0
문항2	1	0	0
문항3	1	0	0
문항4	1	1	0
문항5	1	1	0
문항6	1	0	1
문항7	1	0	1

(f) H3모듈의 Q행렬 최종안

	H0-1
문항1	1
문항2	1

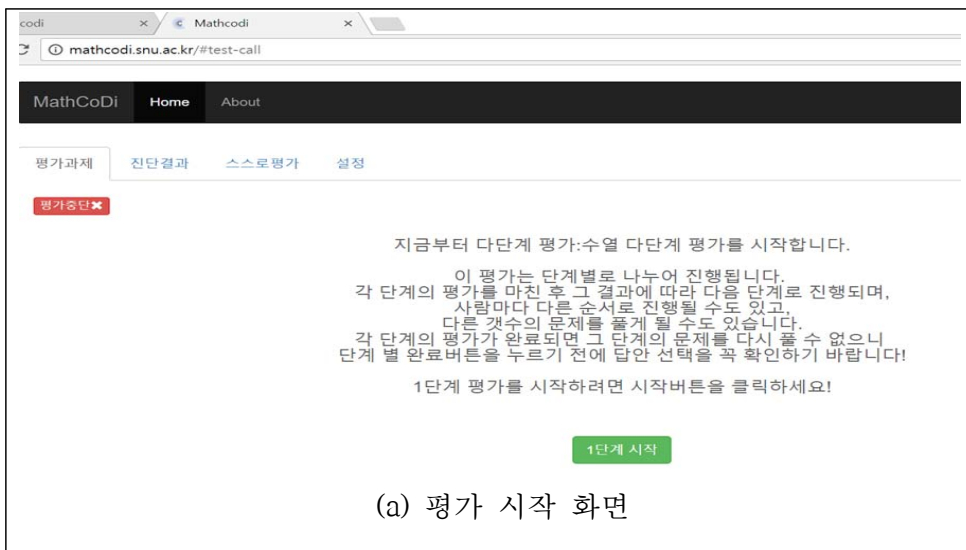
(g) H0모듈의 Q행렬 최종안

IV. 연구 결과

1. 다단계 검사에 따른 수열 단원과 관련 선행 인지요소 숙달 양상

1. 1 컴퓨터 평가 구현 및 수행 결과

컴퓨터를 활용하여 적응적인 인지진단평가를 수행하기 위해 검사도구 제작 내용을 바탕으로 평가를 구현하였다. [그림 IV-1]은 구현된 화면이다. 평가에 대한 설명과 함께 1단계 시작 버튼을 누르면 평가가 시작된다. 객관식은 마우스로 선택하여 답을 적을 수 있도록 하였으며 주관식은 키보드 혹은 마우스입력 버튼을 사용하여 마우스로 답을 적을 수 있도록 하였다. 각 단계마다 문항은 검토 및 수정이 가능하며 1단계 평가 완료 버튼을 누르면 본인의 응답내용을 확인할 수 있고, 다시 한 번 1단계 평가완료 버튼을 누르면 2단계 평가로 진행이 된다.



평가중단 ✕

문제 1-1 문제 1-2 문제 1-3 문제 1-4 문제 1-5 문제 1-6 문제 1-7 문제 1-8

자연수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 7$ 일 때, a_6 의 값은?

- ☐ ㉠ 11
☐ ㉡ 13
☐ ㉢ 17
☐ ㉣ 19
☐ ㉤ 23

다음문제 ➡

1단계 평가완료

(b) 객관식 문항 화면

평가중단 ✕

문제 1-1 문제 1-2 문제 1-3 문제 1-4 문제 1-5 문제 1-6 문제 1-7 문제 1-8

다음 등차수열의 5, 8, 11, a, 17, ...의 공차 d와 a의 값을 차례대로 구하시오.

정답 : d= a=



마우스입력

이전문제 ⬅

다음문제 ➡

1단계 평가완료

(c) 단답형 문항 화면

1단계 평가를 완료하겠습니까?

지금까지의 응답내용은 다음과 같습니다.

되돌아가기
1 단계 평가 완료

문제번호	본인의 응답
1-1	4
1-2	1
1-3	3,14
1-4	3
1-5	2
1-6	2,10
1-7	1
1-8	5

(d) 1단계 평가 완료 화면

평가중단✖

1단계 평가가 완료되었습니다.

다음은 2단계 평가로 진행합니다!

2단계 평가를 시작하려면 시작버튼을 클릭하세요!

2단계 시작

(e) 2단계 평가 시작 화면

[그림 IV-1] 다단계 평가가 구현된 화면

검사 알고리즘에 의해 평가가 종료되면 다음 [그림 IV-2]와 같이 최종 결과 화면에 평가 결과 분석 글과 함께 달성도를 알려주는 그림도표를 나타내어 본인의 숙달 상황을 확인할 수 있다. 인지요소들의 위계를 나타낸 그림도표는 각 인지요소마다 숙달한 확률과 함께 숙달된 인지요소는 진하게 표현하여 본인이 어디까지 숙달하였으며 부족한 부분은 무엇인지 시각적으로 확인할 수 있다. 이후 설문응답 하러가기를 마우스로 클릭하면 구글폼의 설문지로 이동하여 다단계 인지진단평가에 대한 설문

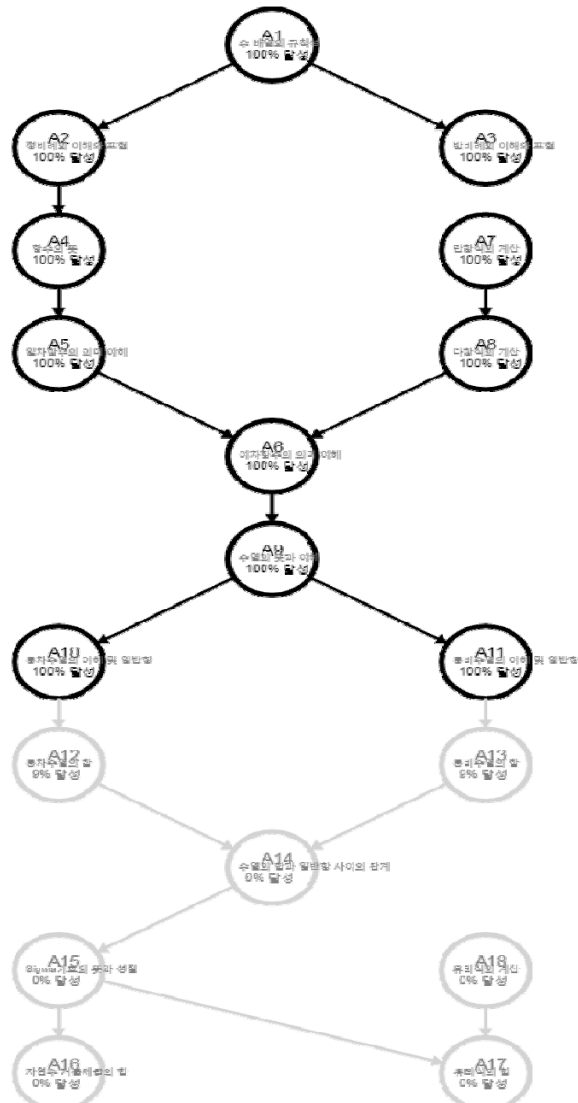
을 진행하였다.

평가단기

평가 결과분석

수열의 뜻과 등차,등비수열의 일반항까지 잘 이해하고 있습니다. 등차,등비수열의 합부터 학습이 필요합니다.

설문응답 하러가기



[그림 IV-2] 다단계 평가의 최종 결과 화면

분석할 데이터를 수집하기 전에 먼저 1학년 학생 20명을 대상으로 예비평가를 수행하여 컴퓨터 평가 진행에 오류가 있는지 확인한 후 재정비하였다. 실제 평가는 정규수업시간에 학교 컴퓨터실인 E-ROOM에서 연구자가 직접 연구내용과 진행절차를 설명한 후 진행하였으며 <표 IV-1>과 같이 2학년 학생 총 291명이 평가를 수행하였다. 그러나 무응답한 4명과 한 숫자로만 일관되게 답을 작성했던 2명을 제외하고 285명의 데이터를 분석대상으로 하였다.

<표 IV-1> 연구참여 학생 구성

성별	평가대상(명)	분석제외(명)
남	116	1
여	175	5
총	291	6

1. 2 단계 진행 유형 분석

검사를 시행하는 모든 학생은 H1모듈을 경험한 후 문항반응에 따라 다음 모듈이 제시되며 더 이상 진행할 후보군 모듈이 없을 경우에 검사가 종료되었다. 따라서 학생의 능력에 따라 검사의 길이는 다양하지만 최대 4단계까지 경험할 수 있다. 1단계에서 시험이 종료된 경우를 제외하고 2,3,4단계까지 진행되는 경우는 크게 H1단계의 인지요소가 숙달되어 다음 고등학교 수열 영역의 단계로 진행되는 상향형과, H1단계의 인지요소가 미숙달되어 선행요소를 확인하는 단계로 진행되는 하향형으로 구분 할 수 있다. 상향형은 85.96%, 하향형은 9.82%였다. 다음 <표 IV-2>는 구체적인 단계진행의 유형과 비율을 나타내었다.

〈표 IV-2〉 단계 진행 유형과 비율

단계수	단계 진행 유형	학생 수	비율(%)
4	H1→H2→H3→H0	38	13.33
4	H1→M1→G1→M2	14	4.91
3	H1→H2→H3	114	40.00
3	H1→M1→M2	6	2.11
2	H1→H2	93	32.63
2	H1→M1	8	2.81
1	H1	12	4.21
총계		285	100

3단계 까지 진행한 경우가 42.11%로 가장 많았으며 그 중에 H1→H2→H3로 진행한 비율이 40%를 차지하였다. 다음으로 2단계 까지 진행한 경우가 35.44%로 많았으며 그 중 H1→H2로 진행한 비율이 2.81%이었다. 그 다음으로 19.24%의 학생이 4단계까지 진행하였으며 그 중 H1→H2→H3→H0로 진행한 비율이 13.33%이었다. 가장 비율이 낮은 경우는 H1→M1→M2로 진행한 경우로 2.11%이었다. 85%정도의 학생들이 H1 외의 고등학교 수월 영역의 모듈을 경험하였음을 알 수 있다.

1. 3 인지요소 프로파일

다단계 검사방식의 각 모듈별로 베이지안 네트워크를 사용하여 학생들의 문항 반응 유형에 따른 인지요소별 숙달 확률을 추정하였다. 인지요소 숙달확률이란 문항에 대한 반응을 토대로 검사가 측정하고자 하는 인지요소를 숙달한 확률이며 0~1 범위 내의 값을 갖는다. 학생들의 문항반응을 정답은 1, 오답은 0의 값을 가지는 Bernoulli 분포를 따르는 문항별 확률변수로 모델링 하였으며 각 문항은 Q-matrix의 설정에 따라 해당 인

지요소를 부모(parent)변수로 가지고 있도록 베이지안 네트워크가 설정되었다. 인지요소간의 위계 역시 베이지안 네트워크의 arc로 설정되었다. 인지요소를 나타내는 노드 또한 숙달은 1, 미숙달은 0인 Bernoulli 분포로 모델링 하였다. 이 때, 각 학생이 각 모듈을 수행하고 나면 문항별 정/오답의 결과가 베이지안 네트워크의 evidence(e) 로 주어지게 되고 이로부터 각 인지요소를 나타내는 노드의 숙달 확률이 $P(A_i = 1|e)$ 로 업데이트 되었다. 학생이 수행한 단계별 인지진단평가 결과가 결정된 후에는, 모듈을 수행하지 않았으나 위계 구조에 의해 숙달이 확실한 모듈의 인지요소의 숙달확률을 1로 강제하였다. <표 IV-3>은 4단계(H1→M1→G1→M2)까지 진행한 학생들 중에서 두 학생의 인지요소 숙달 확률을 예시로 나타낸 것이다. 문항반응유형은 G1, M1, M2, H1, H2, H3, H0 모듈 순서대로 나타내었다. 학생 A, B는 같은 단계의 같은 문항을 경험하였지만 인지요소 숙달확률은 다른 것으로 확인할 수 있다.

<표 IV-3>4단계(H1→M1→G1→M2)를 진행한 학생들의 인지요소 숙달 확률

인지요소	문항반응유형	
	A학생	B학생
	1100001000000000000	1110000000000000000
G1-1	1.000	1.000
G1-2	0.997	0.997
G1-3	0.047	0.800
M1-1	0.043	0.001
M1-2	0.000	0.000
M1-3	0.000	0.000
M2-1	0.890	0.006
M2-2	0.042	0.005
H1-1	0.343	0.142

H1-2	0.106	0.138
H1-3	0.002	0.001
H2-1	0.000	0.000
H2-2	0.000	0.000
H2-3	0.000	0.000
H3-1	0.000	0.000
H3-2	0.000	0.000
H3-3	0.000	0.000
H0-1	0.000	0.000

이렇게 얻은 숙달확률을 특정값을 기준으로 숙달/미숙달을 분류하며 보편적으로 0.5를 사용한다. 따라서 본 연구에서도 0.5를 기준으로 숙달/미숙달을 분류하였다. <표 IV-4>은 0.5이상의 숙달확률의 상대빈도 비율(%)을 나타내었다. 모듈 G1, M1, M2에서 숙달로 판정된 학생들 중 90% 이상의 학생이 숙달확률이 1이었으며, 모듈 H1, H2, H0와 인지요소 H3-1, H3-2에서는 80%이상의 학생이 숙달확률이 0.9이상 1.0이하에 있음을 확인할 수 있다. 인지요소 H3-3에서는 75.44%의 학생이 0.8이상 1.0미만에 위치해있으며 0.5이상 0.7미만에서는 없음을 확인할 수 있다.

<표 IV-4> 0.5이상의 숙달확률의 상대빈도 비율(%)

인지 요소	0.5이상의 숙달확률의 상대빈도 비율(%)					1.0
	0.5이상~ 0.6미만	0.6이상~ 0.7미만	0.7이상~ 0.8미만	0.8이상~ 0.9미만	0.9이상~ 1.0미만	
G1-1	0	0	0	0	1.78	98.22
G1-2	0	0	0.36	0	3.20	96.44
G1-3	0	0	0	1.09	0.72	98.19

M1-1	0	0	0	0	3.32	96.68
M1-2	0	0	0.75	0	2.61	96.64
M1-3	0	0	0	0	3.02	96.98
M2-1	0	0.37	0	0.37	0.37	98.88
M2-2	0.37	0	0	0	0.37	99.25
H1-1	0	0	0	0	16.34	83.66
H1-2	0	0	0	0	15.83	84.17
H1-3	0	0	0	0	16.45	83.55
H2-1	0	1.98	3.47	9.90	50.00	34.65
H2-2	0	4.66	3.63	3.11	49.22	39.38
H2-3	0	4.61	7.89	0	3.29	84.21
H3-1	2.34	0	2.34	0	35.16	60.16
H3-2	0	0	13.79	4.31	81.90	0
H3-3	0	0	24.56	5.26	70.18	0
H0-1	0	0	0	0	11.63	88.37

각 인지요소의 숙달 확률이 0.5 이상이면 숙달로 추정하며 ‘1’로 표현하고, 0.5 미만이면 미숙달로 추정하며 ‘0’으로 표현하여 인지요소 프로파일을 얻을 수 있다. 인지요소 프로파일은 [000000000000000000], [110000100000000000], [111100110000000000] 등으로 나타내고 각 자리의 숫자는 인지요소와 대응되며 <표 IV-5>와 같다. [000000000000000000]은 모든 인지요소를 숙달하지 못한 것을 의미하며, [110000100000000000]은 인지요소 G1-1, G1-2, M2-1인 수 배열의 규칙성, 정비례, 단항식의 계산 인지요소를 숙달한 것을 의미한다. [111100110000000000]은 인지요소 G1-1, G1-2, G1-3, M1-1, M2-1, M2-2인 수 배열의 규칙성, 정비례, 반비례, 함수의 뜻, 단항식의 계산, 다항식의 계산 인지요소를 숙달한 것을 의미한다.

〈표 IV -5〉 인지요소 프로파일의 각 숫자에 대응되는 인지요소

모듈별 인지요소														인지요소 프로파일			
G1-			M1-			M2-		H1-			H2-				H3-		H0-
1	2	3	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2	3		1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

이를 바탕으로 학생들의 상태를 분석하여 얼마나 인지요소를 숙달하고 있으며 미숙달인 인지요소는 무엇인지 현황을 파악해볼 수 있다. 〈표 IV -6〉는 본 연구에서 관찰할 수 있었던 수열과 그 선행요소의 인지요소 프로파일 유형이다. 각 인지요소 프로파일에 해당하는 미숙달 요소는 각 모듈의 해당하는 인지요소를 모두 미숙달하였으면 모듈로 표현하였다. 전체 학생들의 인지요소 프로파일 중 가장 큰 비율을 차지하는 인지요소 숙달유형은 [111111111111111111]로 전체의 38.26% 학생들이 모든 인지요소를 숙달한 것으로 나왔다. 두 번째로 많은 비율을 차지한 인지요소 숙달유형은 [111111111111100000]로 수열의 합과 일반항 사이의 관계(인지요소 H2-3), \sum 기호의 뜻과 성질, 자연수 거듭제곱의 합, 유리식의 합(모듈 H3), 유리식 계산(모듈 H0)만 미숙달한 유형이었다. 그 다음으로 등비수열의 합(인지요소 H2-2), 수열의 합과 일반항 사이의 관계(인지요소 H2-3), \sum 기호의 뜻과 성질, 자연수 거듭제곱의 합, 유리식의 합(모듈 H3), 유리식 계산(모듈 H0)을 숙달하지 못한 [111111111111000000]유형이 전체의 6.67%로 세 번째였다.

〈표 IV-6〉 인지요소 프로파일

순위	인지요소 프로파일	학생 수	비율(%)	미숙달 요소
1	111111111111111111	109	38.26	미숙달 요소 없음
2	111111111111100000	26	9.12	H2-3, H3, H0
3	111111111111000000	19	6.67	H2-2, H2-3, H3, H0
4	11111111111110000	17	5.96	H3, H0
5	111111111110000000	16	5.61	H2, H3, H0
6	111111111110100000	13	4.56	H2-1, H2-3, H3, H0
7	111111111000000000	12	4.21	H1-2, H1-3, H2, H3, H0
8	111111111100000000	9	3.16	H1-3, H2, H3, H0
9	111111110000000000	8	2.81	H1, H2, H3, H0
10	11111111111110001	7	2.46	H3
11	11111111111111011	5	1.75	H3-2
11	111111111101000000	5	1.75	H1-3, H2-2, H2-3, H3, H0
11	111000000000000000	5	1.75	M1, M2, H1, H2, H3, H0
14	11111111111111101	4	1.40	H3-3
14	11111111111111001	4	1.40	H3-2, H3-3
14	110000000000000000	4	1.40	G1-3, M1, M2, H1, H2, H3, H0
14	000000000000000000	4	1.40	G1, M1, M2, H1, H2, H3, H0
18	11111111111111100	3	1.05	H3-3, H0
18	11111111111111000	3	1.05	H3-2, H3-3, H0
18	111111111010000000	3	1.05	H1-2, H2, H3, H0
21	111111111010100000	2	0.70	H1-2, H2-1, H2-3, H3, H0
21	111100000000000000	2	0.70	M1-2, M1-3, M2, H1, H2, H3, H0
23	111110110000000000	1	0.35	M1-3, H1, H2, H3, H0
23	111110100000000000	1	0.35	M1-3, M2-2, H1, H2, H3, H0
23	111110000000000000	1	0.35	M1-3, M2, H1, H2, H3, H0
23	111100110000000000	1	0.35	M1-2, M1-3, H1, H2, H3, H0
23	110000100000000000	1	0.35	G1-3, M1, M2-2, H1, H2, H3, H0

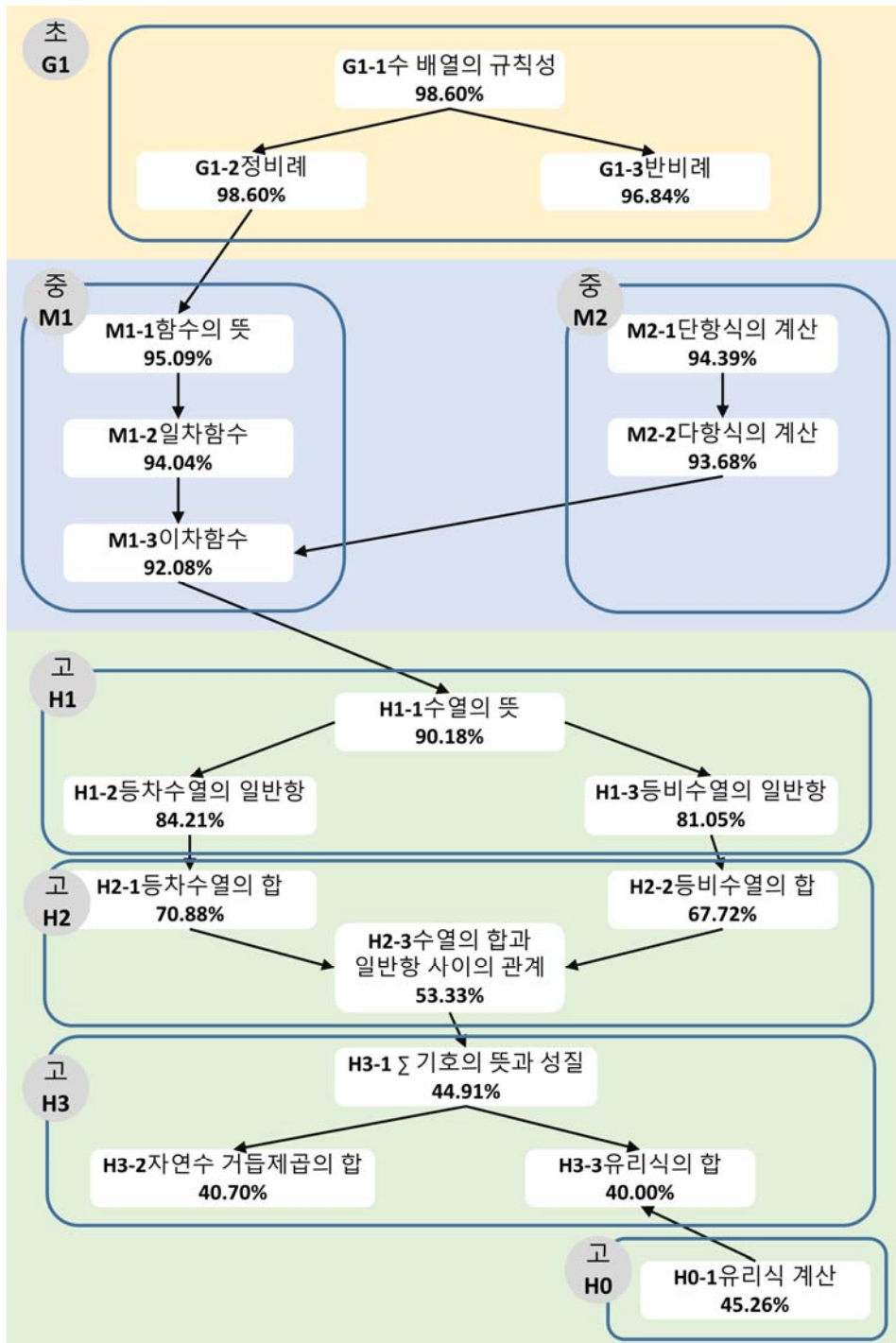
1. 4 인지요소 숙달양상 분석

수열과 관련 선행 영역 내에서 학생들의 전반적인 인지상태를 알아보기 위해 인지요소 프로파일을 바탕으로 각 인지요소별 숙달 비율을 확인해보았으며 [그림 IV-3]과 같다. 검사 전에 설정한 위계구조를 따르면서 해당 인지요소를 숙달한 비율을 나타낸 것이다. 즉, 인지요소 G1-2(정비례)를 숙달한 학생 98.60%는 선행 인지요소인 인지요소 G1-1(수 배열의 규칙성)도 함께 숙달한 학생들의 비율을 의미한다. 인지요소 M1-3(이차함수)를 숙달한 학생 94.04%는 선행 인지요소인 인지요소 G1-1(수 배열의 규칙성), G1-2(정비례), M1-1(함수의 뜻), M1-2(일차함수), M2-1(단항식의 계산), M2-2(다항식의 계산)도 함께 숙달한 학생들의 비율을 의미한다. 그 외 선행 인지요소를 갖지 않는 인지요소 G1-1(수 배열의 규칙성), M2-1(단항식의 계산), H0-1(유리식 계산)의 경우에는 각 해당 인지요소만 숙달한 비율을 의미하여 각각 숙달한 학생은 98.60%, 94.39%, 45.26%이다.

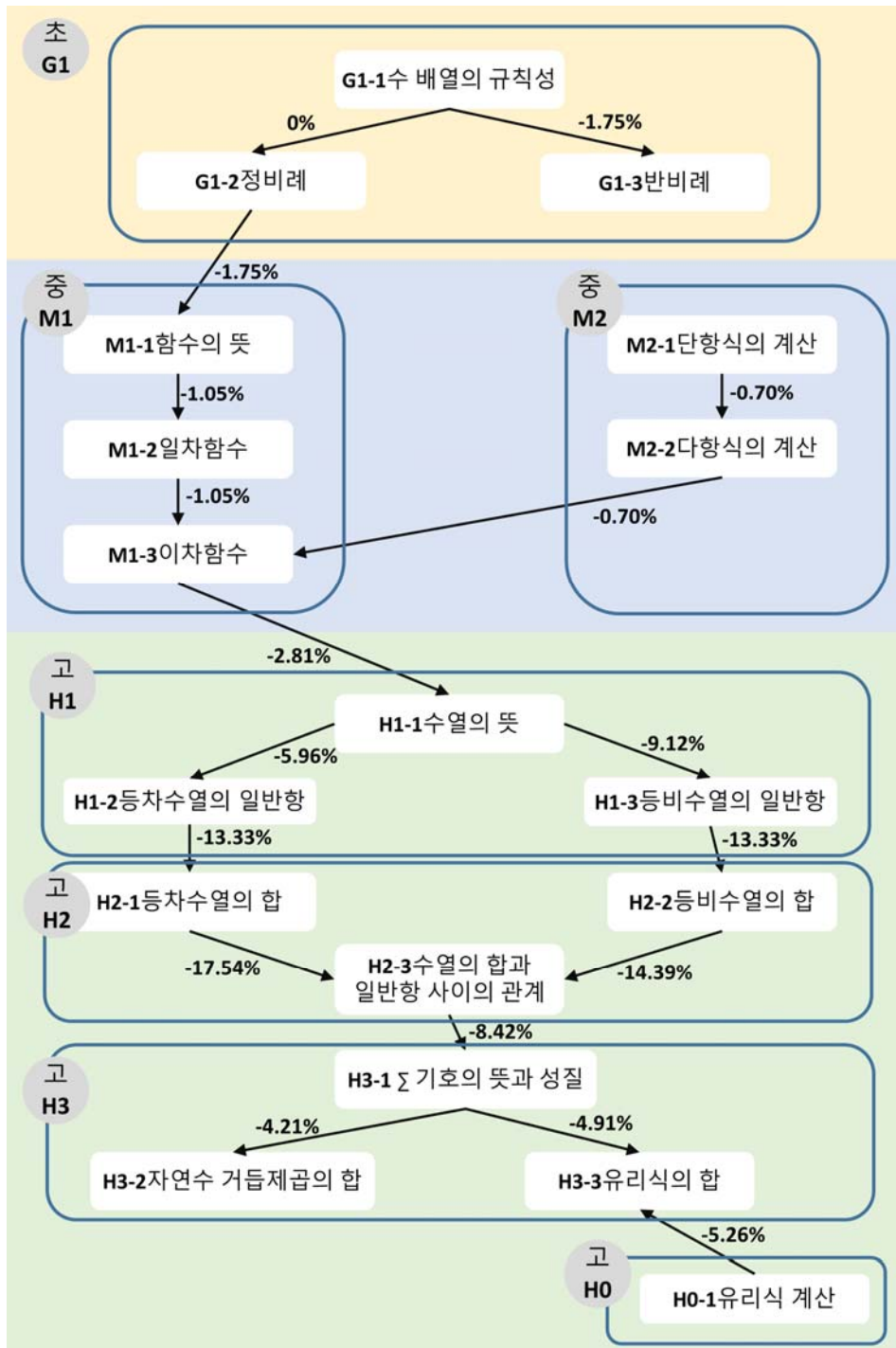
18개의 인지요소에서 40.00%~98.60%의 숙달 수준을 보였고 이 중 인지요소 G1-1(수 배열의 규칙성)과 G1-2(정비례)가 98.60%로 가장 높은 숙달 비율을 보였다. 그러나 인지요소 H3-2(자연수 거듭제곱의 합)과 H3-3(유리식의 합)은 각각 40.70%, 40.00%로 상대적으로 낮은 숙달 수준을 보였다. 이는 위계구조상에서도 가장 아래쪽에 위치하여 선행 인지요소를 가장 많이 가지고 있는 인지요소이기도 하다. 전체적으로 위계 구조 아래쪽으로 갈수록 숙달 비율이 낮아지는 것을 확인할 수 있다.

학습결손이 어디서 이루어지는지를 알아보기 위해 선행 인지요소가 숙달된 상황에서 다음 인지요소의 숙달로 넘어가는 과정에서 결손이 일어나는 비율을 확인하였으며 [그림 IV-4]와 같다. 인지요소 간 연결하는 화살표에 결손 비율 수치를 나타내었으며 이 수치는 선행 인지요소까지는 숙달하였으나 다음 인지요소를 숙달하지 못한 비율을 의미한다. -17.54%~0%의 결손 비율을 보였고 이 중 인지요소G1-1(수 배열의 규칙

성)에서 G1-2(정비례)로 갈 때 결손 비율은 0%로 결손이 없는 것으로 나타났다. 즉, 수 배열의 규칙성을 숙달한 학생은 모두 정비례까지 숙달함을 의미한다. 전반적으로 초등학교 영역과 중학교 영역에서의 인지요소 간 결손 비율은 -1.05%~0%로 손실 정도는 작은 것을 알 수 있다. 중학교 영역에서 고등학교 영역으로 넘어가는 부분인 인지요소 M1-3(이차함수)에서 인지요소 H1-1(수열의 뜻) 사이의 결손 비율은 -2.81%이다. 인지요소 H2-1(등차수열의 합)에서 H2-3으로 가는 부분의 결손 비율은 -17.54%로 가장 크게 나타나고 있음을 보이며 H1모듈에서 H2모듈로 넘어갈 때 -13.33%의 비율로 높은 결손 비율을 보인다. 따라서 수열의 합으로 넘어가는 부분과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 문항을 해결하는 부분에서 많은 손실이 일어나고 있음을 알 수 있다. 또한 Σ 의 기호가 도입되어 그 성질을 이해하는 부분으로 넘어갈 때 -8.42%의 다소 높은 결손 비율을 보였다. 이는 김수진(2001)에 의하면 학생들이 수열단원에서 수열의 일반항 및 합을 구하는 공식 등 다양한 공식과 기호 및 용어에 대한 이해에 어려움을 가지고 있음을 뒷받침한다.



[그림 IV -3] 학생들의 인지요소 숙달 비율



[그림 IV-4] 인지요소 간 결론 비율

2. 다단계 검사의 설문 응답 반응 조사

설문지는 구글폼을 통해 컴퓨터로 검사가 종료된 후 바로 진행되었으며 컴퓨터 기반 적응 검사인 다단계 인지진단평가의 시행 경험에 대한 인식을 조사하였다. 각 문항은 5점의 리커트 척도²⁾로 제시하였다. 또한 마지막 문항에는 다단계 검사에 대해 추가로 자유롭게 의견을 서술할 수 있는 장문형 텍스트 문항을 제시하였다. 각 문항의 응답자 반응의 평균 점수와 표준편차는 다음 <표 IV-7>과 같다. 평균은 3.51~3.87로 각 문항에 대해 보통정도의 반응을 보였으나 표준편차가 0.96~1.10이므로 각 문항마다 응답반응 상황을 살펴보았다.

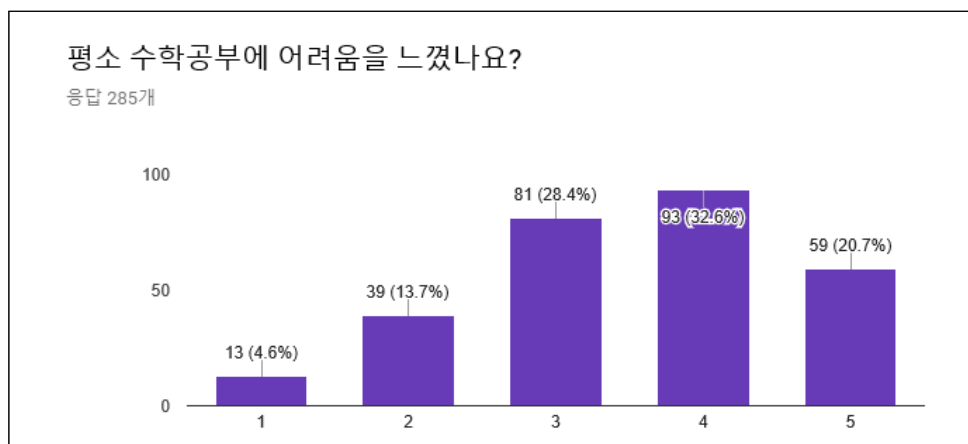
<표 IV-7> 설문 문항별 점수 평균과 표준편차

설문문항	평균	표준편차
평소 수학공부에 어려움을 느꼈나요?	3.51	1.10
다단계 평가의 평가 결과 분석 내용(글)이 도움이 되었나요?	3.59	0.99
다단계 평가의 달성도를 알려주는 그림도표가 도움이 되었나요?	3.78	1.01
이번 다단계 평가가 본인의 수열에 관한 학습에 도움이 되었나요?	3.68	1.02
수열에 대한 숙달여부를 판단하는데 있어서 문제의 난이도는 적당했나요?	3.79	0.96
이 다단계 인지진단 평가를 수업시간에 도입하는 것이 본인의 학습에 도움이 될 것 같나요?	3.87	0.96

2) 본 연구에서는 5점 척도를 사용하였으며, 각 항목에 대한 응답 점수는 다음과 같이 부여하였다.

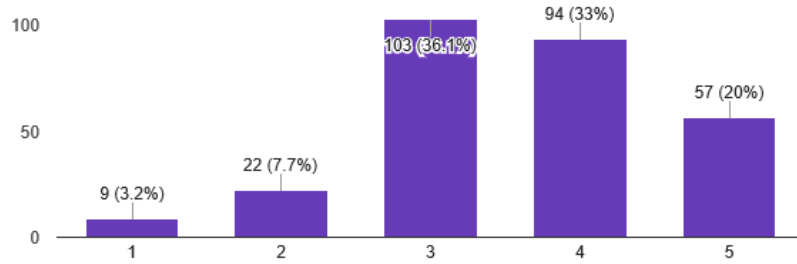
	전혀아니다	약간 아니다	보통이다	조금 그렇다	매우 그렇다
점수	1	2	3	4	5

각 문항에 대한 응답 그래프는 [그림 IV-5]와 같다. 전체 학생 중 53.3%의 학생들이 평소 수학 공부에 대한 어려움의 정도를 4이상으로 표현하였음을 통해 반 이상의 학생들이 수학에 대한 어려움을 느끼고 있음을 확인할 수 있다. 다단계 인지진단 평가 후 결과 분석에 대한 글과 그림 도표가 도움이 되었는지에 대한 질문에 각각 전체 학생 중 53%, 62.8%가 4점 이상으로 나타내었다. 또한 다단계 인지진단평가가 본인의 수열 학습에 도움이 되었는지에 대해 전체 학생 중 59.7%가 4점 이상으로 표현하였으며 30.5%는 보통정도의 도움이 된다고 답하였다. 수업시간에 이 다단계 인지진단평가를 도입하는 것에 대해 전체 학생 중 70.2%가 4점 이상으로, 22.8%는 보통정도의 도움이 된다고 답하였다. 전반적으로 다단계 인지진단평가가 본인의 학습방향 설정 등 수학학습에 도움을 줄 수 있다는 긍정적인 반응을 보였다.



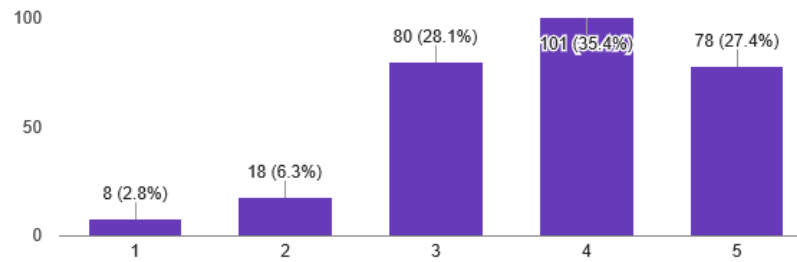
다단계 평가의 평가 결과 분석 내용(글)이 도움이 되었나요?

응답 285개



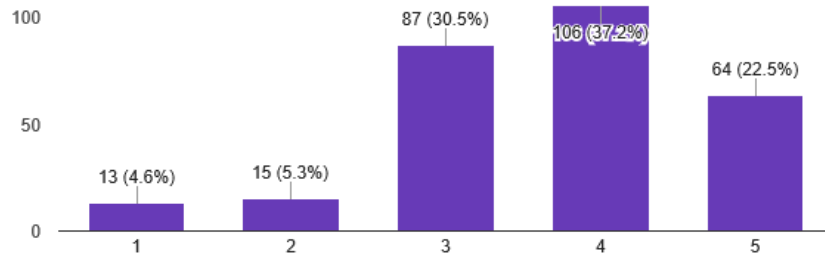
다단계 평가의 달성도를 알려주는 그림도표가 도움이 되었나요?

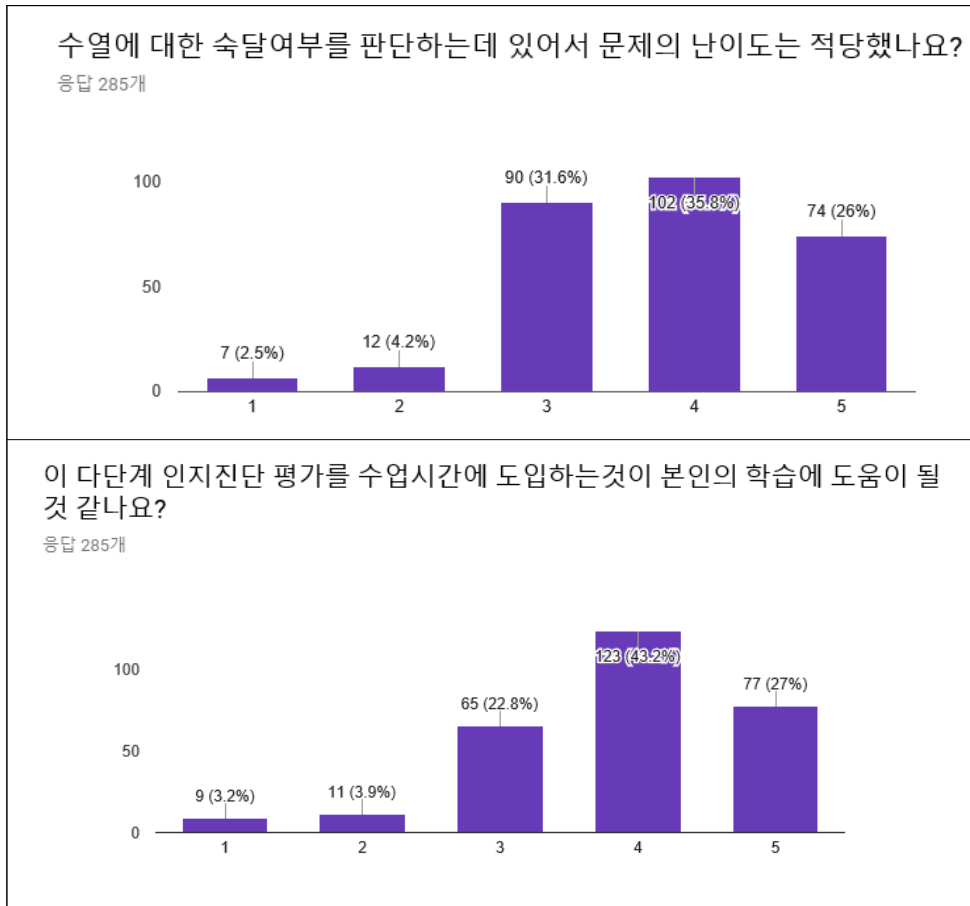
응답 285개



이번 다단계 평가가 본인의 수열에 관한 학습에 도움이 되었나요?

응답 285개





[그림 IV-5] 각 문항에 대한 응답 그래프

이 외에도 다단계 검사를 치르면서 전반적으로 느낀 소감이나 개선사항에 대해 조사하였다. 86건의 응답이 있었으며 긍정적인 의견, 부정적인 의견, 개선점을 제안하는 의견 등 다양한 의견을 볼 수 있었다.

단계별로 제시되는 다단계 진행에 대해 자신의 학습정도를 평가하기에 효과적이며 본인의 부족한 부분을 명확히 알 수 있게 된 점, 다른 아이들과 비교할 필요 없이 본인의 학습정도를 파악할 수 있다는 점 등에 대해 긍정적으로 평가하였다. 그러나 컴퓨터로 진행되는 평가에 대해 색다르고 신선해서 좋았다는 의견도 있었지만 결국 풀이를 종이에 써서 답을

도출해야 하므로 번거롭다는 의견도 있었다. 또한 수업에 도입되었을 때 성적과 연결된다면 부담이 된다는 의견이 있었으며, 한 교실에서 학생마다 다른 문제세트의 경험과 함께 종료시간이 다르다는 점이 친구와 비교 의식을 느낀다는 의견이 있었다. <표 IV-8>은 응답한 의견의 실제 사례 중 일부이다.

<표 IV-8> 응답한 의견의 실제 사례

문제를 풀고 난뒤 자신의 부족한 부분을 글과 도표로 설명해주었기 때문에 공부하는데 도움이 될것 같다.
자신의 부족한 점에 대해 꼭 짚어서 잘 알려줬던 것 같다.
학습했던 내용에 대해서 시험보면 잊어버리는데 복습하는데 있어서 어느 부분이 부족한지 알 수 있어서 좋은것 같다.
다른 아이들과 평가할 필요 없이 자기 수준에 맞는 학습과 내용을 잘 이해하는 것이 목적인 게 좋았다.
다른 프로그램과는 달리 시간제한이 없어서 오래 걸리더라도 정확한 풀이를 통한 문제풀이가 가능하여 복습하는 용도로 적합했던 것 같다.
등비수열이 평소에도 안되어있는 걸 느꼈는데 역시나 등차에서만 표가 그려져있고 등비에서는 표가 멈춰있는걸 보니 제대로 확인한 느낌이에요. 문제를 못풀면 그다음 문제는 조금 쉬운거 라고 하셨는데 이렇게 난이도 조절하면서 문제 푸는게 좋은거 같아요
수업에 도입한다면 성취도가 낮은 학생에게는 수업 때마다 개인별로 결과가 나오고 전산상에 성적이 남는다는 것이 부담스러울 것 같다. 또 사람마다 몇 단계까지 문제가 나오는지가 다르고 그에 따른 풀이시간에도 차이가 있기 때문에 학생들 간에 비교가 되어 더더욱 성취도가 낮은 학생에게 가혹한 것 같다. 성적은 몰라도 풀이시간은 공개적으로 동급생들에게 보여지기 때문이다.

V. 결론

1. 논의 및 결론

본 연구에서는 수학교과가 가진 위계적 성격을 반영한 적응적 인지진단평가인 다단계 인지진단평가 수행하는 방법을 탐색해 보고자 하였다. 특히 수열 단원의 평가에 적용하였을 때 학생들의 수열 단원의 내용 요소 및 선행요소의 숙달 상황에 대해 분석하여 학생들의 인지상태를 알아 보고자 하였다.

첫째, 인지요소 위계를 고려한 다단계 인지진단 평가를 어떤 방법으로 구성할지 그 방법에 대해 탐색하였다. 먼저 다단계 인지진단평가를 적용할 단원으로 수열 단원을 선정하였다. 교육과정과 문헌들을 바탕으로 전문가와 함께 초등학교 과정에서부터 고등학교 수열단원까지 수열단원과 수열과 관련된 선행요소에 대한 인지요소를 추출하고 추출된 인지요소들 간의 위계관계를 설정하였다. 영역과 내용 및 위계관계를 고려하여 인지요소들을 모듈로 묶어 초등학교 영역에서 1개의 모듈, 중학교 영역에서 2개의 모듈, 고등학교 영역에서 4개의 모듈로 총 7개의 모듈을 설정하였다. 각 모듈마다 인지요소에 해당하는 문항의 검사지를 개발하였으며 각 모듈별로 문항과 인지요소 간의 Q행렬을 작성하였다. 또한 다단계 검사의 알고리즘은 다음과 같다. 검사를 하는 모든 학생은 고등학교 영역의 첫 번째 모듈에서 시작하여 학생의 응답에 따라 모듈에서 측정하는 인지요소의 숙달여부를 판정하여 이를 바탕으로 다음 모듈이 제시된다. 제시될 다음 모듈이 2개 이상일 경우에는 우선순위를 정하여 차례대로 모듈이 제시될 수 있도록 하였다. 더 이상 다음단계로 진행하는 후보군 모듈이 없으면 검사는 종료된다.

이러한 방식의 검사는 동일한 검사지로 시행하는 일괄적인 검사에 대한 제한점을 극복하고 학생 개개인의 능력을 고려한 적응적인 검사라는 점에 의의를 가진다. 또한 이를 바탕으로 학생들은 각자의 인지상태에

대한 구체적인 진단정보를 제공받는다. 학생들은 위계 구조상에서 본인의 학습정도를 파악할 수 있고 이는 앞으로의 학습에 방향성을 알려주는 지표가 되어 자기주도적 학습을 계획할 수 있을 것이다.

둘째, 다단계 인지진단평가를 수열영역에 적용하여 실제 학생들의 인지요소 숙달 양상을 알아보았다. 검사에 참여한 총 285명 중 약 90%정도의 학생들이 고등학교 영역만의 검사를 시행하였으며, 학생들이 중학교 영역까지는 대체로 잘 숙달하고 있음을 확인할 수 있었다. 그리고 전체적으로 학생들의 인지요소 숙달 유형에 대한 비율을 확인해봄으로써 학생들의 수열에 대한 인지숙달현황을 파악하였다. 이러한 인지상태 프로파일을 통해 교사는 학생들의 부족한 부분을 파악하고 이를 바탕으로 앞으로의 수업에 효과적이며 학생의 이해에 맞는 수업을 설계하는데 도움이 될 것이다. 또한 인지요소 숙달비율과 결손비율을 통해 구체적으로 학생들이 어떤 부분에서 학습 결손이 일어나는지 살펴볼 수 있었다. 수열의 일반항에서 합으로 넘어가는 과정과 \sum 의 도입에서 결손이 상당히 많이 일어남을 확인할 수 있었다. 이는 수열의 일반항 및 합을 구하는 공식 등 다양한 공식과 기호 및 용어에 대한 이해에 어려움을 겪고 있음을 확인할 수 있었다. 이러한 구조적 오류는 김동현(2013)이 지적한 것처럼 부정확한 공식 사용, 정의의 개념이 불완전함, 기호화 · 상징화된 수식의 이해가 불완전함에 기인한 것으로 이해할 수 있다. 따라서 수열에서는 다양한 공식과 새로운 기호가 도입되는 영역이므로 공식의 유도과정 등을 바탕으로 개념의 완전학습 및 기호에 대해 충분한 이해를 할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

셋째, 다단계 인지진단평가의 시행 경험에 대한 인식을 조사하였다. 인지진단평가를 마친 후 구글폼을 사용하여 설문조사를 하였다. 50%이상의 학생들이 인지진단평가를 통해 본인의 수열학습의 상황에 대한 결과분석이 도움이 되었으며 앞으로의 학습에 도움이 된다고 답하였다. 또한 수업시간에 다단계 인지진단평가를 도입하는 것에 대해 전체 학생 중 70.2%가 4점 이상으로 답을 하며 전반적으로 다단계 인지진단평가가 본

인의 학습방향 설정 등 수학학습에 도움을 줄 수 있다는 긍정적인 반응을 보였다. 또한 다단계 검사를 치르면서 느낀 소감이나 개선사항에 대해 다양한 의견을 받았다. 단계형식으로 진행되는 시험 형태에 신선함을 느끼며 자신의 학습정도를 평가하기에 효과적으로 파악할 수 있고 본인의 부족한 부분을 명확히 알 수 있게 된 점 등 긍정적인 평가가 있는 반면 학생의 능력수준에 따라 진행되는 시험단계가 달라 비교의식을 느낀다는 점과 컴퓨터로 진행하지만 풀이를 종이에 써야 하는 불편함 등 부정적인 평가도 보였다. 학생들은 적응형 인지진단 평가의 의의를 이해하고 종래와 다른 평가의 효율성과 진단적 정보를 제공받는 것에 대해 긍정적으로 생각하는 것으로 보인다. 그러나 현실에서 평가의 결과가 주는 부담감과 성적에 대한 압박감에 학생들이 노출되어있는 것으로 보인다. 따라서 평가의 구성과 운영방안을 정교화하여 시행할 필요가 있다.

2. 제한점 및 제언

본 연구에서 제시한 컴퓨터를 활용하여 위계성을 반영한 적응적 인지진단평가를 수행하는 방식은 능력수준이 다양한 학생들에게 행해졌던 기존의 전통적인 검사의 제한점을 극복하고 학생들의 학습상태를 진단할 수 있는 진단평가로서 중요한 의의를 가지고 있다. 그렇지만 아직 다음과 같은 한계점이 있다.

첫째, 본 연구에서 적응 연구에 설정한 모형은 인지요소를 내용요소에 국한하였다. 추론, 문제해결 등과 같은 과정적 인지요소에 관한 모형이 필요할 수 있다. 이 때 연속확률변수를 이용하거나 이산과 연속확률변수의 mixed modeling이 가능할 수 있으나 이에 대한 별도의 연구가 필요하다.

둘째, 적응 연구에서 사용된 Q행렬은 전문가와 함께 교육과정의 내용을 분석하여 작성하였다. Q행렬은 인지진단평가의 타당도와 신뢰도에 기초가 되는 기본 구조를 제시하는 것이기 때문에, Q행렬의 타당화에 대한

양적 검증이 필요하다. 이때, 동일한 검사지가 아닌 학생마다 다른 검사가 시행되므로 모듈 전체 문항을 살펴보면 missing data는 필연적으로 나타난다. 이를 고려한 타당도와 신뢰도 분석이 요구된다. 그러나 본 연구에서는 다단계 인지진단평가 방법이라는 새로운 평가 방법을 제시하고 적용 가능성을 탐색하는 것이기에 Q행렬의 타당화 및 검사에 대한 신뢰도에 대해 따로 심도있게 다루지 못하였다. 따라서 베이지안 네트워크를 이용한 다단계 평가의 Q행렬 타당화와 신뢰도에 대한 심도있는 연구가 마련되어야 한다.

그리고 본 연구에서는 검사지를 개발한 후 바로 검사를 수행하였다. 문항들이 측정하려고 하는 인지요소를 잘 측정하고 있는지 충분한 숙고를 할 수 있는 예비적 자료가 생략이 되어 검사의 타당성을 약화시키는 요인이 되었다.

셋째, 컴퓨터 기반 다단계 인지진단평가를 학교 현장에 도입에 있어 현실적 어려움이 있다. 컴퓨터를 활용한 다단계 인지진단평가를 이해하고 교육과정을 바탕으로 실제 검사를 구성하기까지 교사가 느끼는 실제적 부담과 어려움이 남아있기 때문이다. 교사의 부담을 해결하지 못한다면 다단계 인지진단평가의 장점에도 불구하고 학교현장에 도입하기에는 어려울 것이다. 그리고 학생들 역시 능력에 따라 평가의 길이와 내용이 달라지는 적응형 평가에 대해 부담감과 불안함을 느낀다는 점에 있어 평가를 시행하는 대안적인 방법을 생각해 볼 필요가 있다. 컴퓨터 기반 다단계평가는 각 학생마다 치르는 검사가 동일하지 않기 때문에 동일한 시간에 동시에 검사를 치를 필요는 없다. 인터넷만 연결된다면 충분히 검사가 가능하기 때문에 과제로 검사를 시행하는 방법도 하나의 대안이 될 수 있을 것이다. 또한 시험의 길이가 상이하게 구성된 적응형 평가에 대해 지필평가보다 적은 수의 문항으로 학생의 성취수준을 진단이 가능한 평가의 효율성 (부재울, 2014; 양돈용, 2009; 김미영, 2009; 이지선, 2001)을 확인하는 연구는 많이 진행되었으나 시험의 길이에 따라 학생에게 미치는 심리적인 영향 및 태도에 대한 연구는 아직 부족한 실정이므로 그에 따른 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

- 강현영(2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현-시각적 패턴을 중심으로-. 대한수학교육학회지, 9(2), 313-326
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-261호[별책8].
- 교육과정평가원(2015). 2015 개정 교육과정 총론 해설서(중·고등학교)개발 연구.
- 김동현(2013). 학생들의 수열 단원에서 나온 오류와 선행학습. 건국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김미영, 허선(2005). 의과대학 학생의 샘플이용적응검사에 대한 수용성, 태도 및 그 결과가 능력모수에 미치는 영향. 보건의료교육평가. 제 2권 1호, 105-111.
- 김현미, 정성환(2013). 망막 질환 진단을 위한 베이지안 네트워크에 기초한 데이터 분석. Journal of Korea Multimedia Society Vol.16. 269-280.
- 김희경, 박찬호(2013). 국가수준 학업성취도 평가 결과 분석에 적합한 인지진단모형 탐색:Fusion모형과 DINA모형의 비교. 한국교육과정평가원 Vol.16, NO.2, 127-148.
- 김희경, 김부미(2013). 인지진단모형을 활용한 수학 학업성취 결과 분석 -2011년 국가수준 학업성취도 평가 자료를 중심으로-, 대한수학교육학회지 <학교수학> Vol.15, No.2, 289-314.
- 나선웅, 김경수, 최용석(2012). 베이지안 네트워크를 적용한 컴퓨터 기반 적응적 평가. 정보과학회논문지 : 소프트웨어 및 응용, 39(6), 497-506.
- 박윤범, 박혜숙, 도종훈, 한대희, 이미혜, 최은영, 박은미, 이미령(2014). 우리나라 수학과 교육과정 내용 계통 연구. 한국과학창의재단.

- 부재율(2014). 중등학교 영어 지필선별검사의 SPRT CAT로의 전환 가능성 탐색. *교육평가연구*, 27(2), 449-468.
- 부재율(2002). 컴퓨터 활용 검사. 서울: 교육과학사.
- 신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상익, 서원호, 전제동 이동훈(2013). *고등학교 수학Ⅱ*. 서울: 지학사.
- 양돈용, 한선관(2009). EXSPRT 기반 적응형 수학 문항 평가 시스템 개발. *교육논총*. 29권(통권32호). 65-76.
- 윤지영(2016). 요소 간 위계 방식과 인공신경망을 적용한 수학 인지진단 평가 연구. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 이경은(2012). 초등학교 6학년의 수학 성취 분석을 위한 인지진단모형의 적용. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.
- 이지선(2001). SPRT를 적용한 웹기반 문제은행시스템의 설계 및 구현. 인하대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이진홍(2009). 다단계 검사(Multi-Stage Testing) 시행 조건의 최적화. 성균관대학교 석사학위논문.
- 이혜옥(2005). 적응검사. 서울: 교육과학사.
- 인보란(2014). 인지진단모형에 의한 성별에 따른 수학 성취 특성 차이 분석. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.
- 통계청(2017). 2016년 초·중·고 사교육비 조사 결과.
- 한국경제연구원(2017). 제4차 산업혁명이 요구하는 한국인의 역량과 교육 개혁.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2014). *수학교육신론*. 서울: 문음사.
- Almond, R. G., Mislevy, R. J., Steinberg, L. S., Yan, D., & Williamson, D. M.(2015). *Bayesian networks in educational assessment*. New York: Springer.
- Birnbaum, A.(1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. *Statistical theories of mental test scores*. ed. F. M. Lord and M. R. Novick, 395-480.

- De la Torre (2011). The Generalized DINA Model Framework. *Psychometrika*, 2011, vol. 76, issue 2, 179-199.
- Duanli Yan, Alina A. Von Davier, Charles Lewis(2014). Computerized Multistage Testing Theory and Applications. CRC Press.
- DiBello, L. V., Stout, W. F., & Roussos, L. A.(1995). Unified cognitive/psychometric diagnostic assessment likelihood-based classification techniques. In P. D. Nichols, S. F. Chipman, & R. L. Brennan (Eds.), *Cognitively diagnostic assessment* (p. 361-389). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Flaughter, R.(2000). Item pools. In H. Wainer, (2000). *Computerized adaptive testing:A primer*(2nd ed.).Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum associates.
- Hambleton, R. K., Zaal, J. N., & Pieteres, J.P.M.(1993). Computerized adaptive testing:Theory, Applications, and Standards. In R. K. Hambleton & J. N. Zaal(Ed.), *Advances in educational psychological testing*, 341-366. Boston:Kluwer Academic Pub.
- Hartz, S. M.(2002). A Bayesian framework for the Unified Model for assessing cognitive abilities: blending theory with practicality. Unpublished doctoral dissertation.
- Henson, R. A., Templin, J. L., & Willse, J. T.(2009). Defining a family of cognitive diagnosis models using log-linear models with latent variables. *Psychometrika*, 74 (2), 191-210.
- Junker, B. W., & Sijtsma, K.(2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with non-parametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 25(3), 258-272.
- Kim, H. & B. S. Plake.(1993). Monte Carlo simulation comparison of two stage testing and computerized adaptive testing. Paper presented at the annual meeting of the National Council in Measurement in

Education.

- Kingsbury, G. G., & Zara, A. R.(1991). A comparison of procedure for content-sensitive item selection in computerized adaptive test. *Applied Measurement in Education*, 4, 241-261.
- Koch, W. R., Dodd, B. G., & Fitzpatrick, S. J.(1990). Computerized adaaptive measurements of attitudes. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development* 23(1), 23-30.
- Luecht, R. M., & Nungester, R.(1998). Some practical examples of computer-adaptive sequential testing. *Journal of Educational Measurement, Fall 1988, Vol. 35*, 229-249.
- Leighton, J. P., Gierl, M. J., & Hunka, S. M.(2004). The Attribute Hierarchy Method for Cognitive Assessment: A Variation on Tatsouka's Rule-Space Approach. *Journal of Educational Measurement*, 41(3), 205-237
- Levy, R., & Mislevy, R. J.(2004). Specifying and refining a measurement model for a computer-based interactive assessment. *International Journal of Testing*, 4(4), 333-369.
- Maris, E.(1999). Estimating multiple classification latent class models. *Psychometrika*, 64 (2), 187-212.
- NCTM(미국수학교사협회)(2007). 학교수학을 위한 원리와 기준 [Principles and standards for school mathematics]. (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역). 서울: 경문사.
- Patsual, L. N. & R. K. Hambleton(1999). A comparative study of ability estimates from computer-adaptive testing and multi-stage testing. Paper presented at the annual meeting of the National Council on Measurement in education.
- Rupp, A. A., & Templin, J. L.(2008). The effects of Q-matrix misspecification on parameter estimates and misclassification rates in the DINA model. *Educational and Psychological Measurement*,

68, 78-96.

Sinharay, S., & Almond, R. G.(2007). Assessing fit of cognitive diagnostic models: A case study. *Educational and Psychological Measurement*, 67(2), 239-257.

Tatsuoka, K. K.(1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal of educational measurement*, 20(4), 345-354.

Templin, J., & Henson, R.(2006). Measurement of psychological disorders using cognitive diagnosis models. *Psychological Methods*, 11(3), 287-305.

Weiss, D. J.(1982) Improving measurement quality and efficiency with adaptive testing. *Applied Psychological Measurement*, 6(4). 473-492.

〈부 록〉

[부록 1] 검사 문항지

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제			
모 형	H1	인 지 요 소	◆H1-1 수열의 뜻 ◆H1-2 등차수열의 일반항 ◆H1-3 등비수열의 일반항
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 48%;"> <p>H1-1 수열의 뜻</p> <p>1. 자연수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 7$일 때, a_5의 값은?</p> <p>① 11 ② 13 ③ 17 ④ 19 ⑤ 23</p> <p>2. 다음 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$의 일반항은?</p> <p>① $a_n = \frac{1}{n}$ ② $a_n = 2^n$ ③ $a_n = (-1)^n$ ④ $a_n = -3n$ ⑤ $a_n = 3n$</p> <p>H1-2 등차수열의 일반항</p> <p>3. 다음 등차수열의 5, 8, 11, a, 17, ...의 공차 d와 a의 값을 차례대로 나열하면?</p> <p>4. 세 수 $a, 7a, 5a+3$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 실수 a의 값은?</p> <p>① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{2}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{4}{8}$ ⑤ $\frac{5}{8}$</p> </div> <div style="width: 48%;"> <p>5. 다음 등차수열 47, 44, 41, 38, 35 ...의 $\{a_n\}$의 일반항은?</p> <p>① $a_n = 2n+1$ ② $a_n = -3n+50$ ③ $a_n = 4n-7$ ④ $a_n = 5n+3$ ⑤ $a_n = -4n-2$</p> <p>H1-3 등비수열의 일반항</p> <p>6. 다음 등차수열의 5, a, 20, 40, ...의 공비 r와 a의 값을 차례대로 나열하면?</p> <p>7. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2, a_4 = 54$일 때, a_2의 값은?</p> <p>① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14</p> <p>8. 세 수 $a, 6, a-5$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 실수 a의 값의 합을 구하여라.</p> </div> </div>			

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제			
모 형	H3	인 지 요 소	◆H3-1 Σ 기호의 뜻과 성질 ◆H3-2 자연수 거듭제곱의 합 ◆H3-3 유리식의 합
<div> <div> <h3>H3-1 Σ기호의 뜻과 성질</h3> <p>1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n + a_{n+1} = n$이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? ① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27</p> <p>2. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 9$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 7$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3b_k + 4)$의 값을 구하시오.</p> <p>3. $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1)$의 값을 구하시오.</p> </div> <div> <h3>H3-2 자연수 거듭제곱의 합</h3> <p>4. $\sum_{k=1}^6 k(k-1)$의 값을 구하여라.</p> </div> </div> <div> <div> <h3>H3-3 유리식의 합</h3> <p>5. $\sum_{k=2}^n k^2 = 99$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.</p> <p>6. $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)</p> <p>7. $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)</p> </div> </div>			

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제

모 형	H0	인 지 요 소	◆H0-1 유리식 계산
--------	----	------------------	--------------

H0-1 유리식 계산

1. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$
의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

2. 다음 식

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} = \frac{a}{x(x+b)}$$

에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오.

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제

모 형	M1	인 지 요 소	◆M1-1 함수의 뜻 ◆M1-2 일차함수 ◆M3-3 이차함수
--------	----	------------------	-----------------------------------

M1-1 함수의 뜻

1. 지구에서 물체의 무게는 달에서의 무게의 6배라고 한다. 달에서 어떤 물체의 무게가 x kg일 때, 지구에서 이 물체의 무게가 y kg이라고 한다. 이 때, x 와 y 사이의 관계식은?
 ① $y = x + 6$ ② $y = x - 6$ ③ $y = 6x$
 ④ $y = \frac{6}{x}$ ⑤ $x + y = 6$

2. 함수 $f(x) = 4x - 3$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

3. 함수 $f(s) = s^2 - s$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

M1-2 일차함수

4. 다음 중 y 가 x 에 대한 일차함수인 것은?
 ① $y = x + 7$ ② $y = \frac{2}{x}$ ③ $y = x^2$
 ④ $y = -3$ ⑤ $y = 2x(x + 1)$

5. 가로 길이가 3cm이고 세로 길이가 x cm인 직사각형의 둘레의 길이는 y cm라고 할 때, 함수 $y = f(x)$ 는?

- ① $y = 2x$ ② $y = 3 - x$ ③ $y = 2(3 - x)$
 ④ $y = 3 + x$ ⑤ $y = 2(3 + x)$

M1-3 이차함수

6. 다음 중 y 가 x 에 대한 이차함수인 것은?

- ① $y = x + 1$ ② $y = 2$
 ③ $y = (x + 1)(x - 2) - x^2$
 ④ $y = x^2 - 1$ ⑤ $x^2 + x + 1 = 0$

7. 한 변의 길이가 x 인 정사각형의 넓이 y 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 는?

- ① $y = \frac{1}{4}x^2$ ② $y = \frac{1}{2}x^2$ ③ $y = x^2$
 ④ $y = 2x^2$ ⑤ $y = 3x^2$

8. n 과 y 사이의 대응 관계를 식으로 나타낸 것은?

n	1	2	3	4	5
y	1-1	4-2	9-3	16-4	25-5

- ① $y = n - n^2$ ② $y = 2n^2 - n$ ③ $y = n^2 - 2n$
 ④ $y = 2n - 3$ ⑤ $y = n^2 - n$

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제

모 형	M2	인 지 요 소	◆M2-1 단항식의 계산 ◆M2-2 다항식의 계산
--------	----	------------------	-----------------------------

M2-1 단항식의 계산

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① $x^2 \times x^3 = x^{10}$ ② $(x^3)^4 = x^{12}$
 ③ $x^{10} \div x^3 = \frac{1}{x^7}$ ④ $\frac{x^4}{x^4} = 0$
 ⑤ $\left(\frac{a}{b^3}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$

2. $A = 2x - \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{3}x + 3$ 일 때, $2A - 3B$ 를 간단히 나타내면?
 ① $3x - 10$ ② $-7x - 9$ ③ $x + 2$
 ④ $-5x - 9$ ⑤ $5x + 8$

3. $12a^3b^2 \div 4a^2b^3 \times 2ab$ 를 간단히 하면?
 ① $\frac{6a^2}{b}$ ② $6a^2$ ③ $6ab$
 ④ $\frac{6}{ab^2}$ ⑤ $\frac{3a^2b}{2}$

M2-2 다항식의 계산

4. $\frac{3a+b}{2} - \frac{2a-b}{3} = \square a + \square b$ 일 때, \square 안에 들어갈 두 수의 곱은?
 ① $-\frac{25}{36}$ ② $-\frac{5}{18}$ ③ $-\frac{5}{36}$
 ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{25}{36}$

5. $(a+4b)(a-6b)$ 를 전개한 식에서 ab 의 계수를 A , b^2 의 계수를 B 라 할 때, $A+B$ 의 값은?
 ① -30 ② -28 ③ -26
 ④ 26 ⑤ 28

수열과 수열에 관련된 선행요소 검사 문제																																																			
모 형	G1	인 지 요 소	◆G1-1 수 배열의 규칙성 ◆G1-2 정비례 ◆G1-3 반비례																																																
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 48%;"> <h3 style="margin-top: 0;">G1-1 수 배열의 규칙성</h3> <p>1. 규칙을 찾아 □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <p>1, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 3, □, ...</p> <p>2. 규칙을 찾아 □ 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <p>1/11, 4/11, 7/11, □ / □, 18/11</p> </div> <div style="width: 48%;"> <h3 style="margin-top: 0;">G1-3 반비례</h3> <p>5. 길이가 36인 막대를 길이가 같은 여러 도막으로 자르려고 한다. 다음 대응표에서 a, b에 들어갈 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">도막의 수</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>12</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">한 도막의 길이</td> <td>18</td> <td>12</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>2</td> </tr> </table> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div style="width: 48%;"> <h3 style="margin-top: 0;">G1-2 정비례</h3> <p>3. 한 상자에 탁구공 8개씩 들어있다. 다음 대응표에서 a, b에 들어갈 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">상자수</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">탁구공수</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>a</td> <td>32</td> <td>b</td> </tr> </table> <p>4. 지우개 한 개의 가격은 500원이다. 다음 대응표에서 a, b에 들어갈 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">지우개 수(개)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">지우개 가격(원)</td> <td>500</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>2000</td> <td>...</td> </tr> </table> </div> <div style="width: 48%;"> <p>6. 물이 50L인 물통에 물을 가득 채우려고 한다. 다음 대응표는 수도꼭지에서 1분동안 나오는 물의 양에 따라 물을 가득 채우는데 걸리는 시간을 나타내었다. 대응표에서 a, b에 들어갈 알맞은 수를 써 넣으시오.</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">물의 양 (L)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">걸 리 는 시간 (분)</td> <td>50</td> <td>25</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>2</td> </tr> </table> </div> </div>				도막의 수	2	3	6	12	18	한 도막의 길이	18	12	a	b	2	상자수	1	2	3	4	5	탁구공수	8	16	a	32	b	지우개 수(개)	1	2	3	4	...	지우개 가격(원)	500	a	b	2000	...	물의 양 (L)	1	2	5	10	25	걸 리 는 시간 (분)	50	25	a	b	2
도막의 수	2	3	6	12	18																																														
한 도막의 길이	18	12	a	b	2																																														
상자수	1	2	3	4	5																																														
탁구공수	8	16	a	32	b																																														
지우개 수(개)	1	2	3	4	...																																														
지우개 가격(원)	500	a	b	2000	...																																														
물의 양 (L)	1	2	5	10	25																																														
걸 리 는 시간 (분)	50	25	a	b	2																																														

[부록 2] 설문지

수열과 관련 선행요소의 숙달여부를 알아보는 다단계 인지진단평가에 대한 설문조사입니다.

5점 척도로써 1(전혀아니다), 2(약간 아니다),3(보통이다),4(조금 그렇다)5(매우 그렇다) 중 하나로 대답해 주세요.

평소 수학공부에 어려움을 느꼈나요? *

1 2 3 4 5

전혀 아니다.	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 그렇다.
---------	----------------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---------

다단계 평가의 평가 결과 분석 내용(글)이 도움이 되었나요? *

1 2 3 4 5

전혀 아니다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 그렇다.
---------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---------

다단계 평가의 달성도를 알려주는 그림도표가 도움이 되었나요? *

1 2 3 4 5

전혀 아니다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 그렇다.
---------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---------

이번 다단계 평가가 본인의 수열에 관한 학습에 도움이 되었나요? *

1 2 3 4 5

전혀 아니다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 그렇다.
---------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	---------

수열에 대한 숙달여부를 판단하는데 있어서 문제의 난이도는 적당했

나요? *

	1	2	3	4	5	
전혀 아니다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 그렇다.

이 다단계 인지진단 평가를 수업시간에 도입하는것이 본인의 학습에
도움이 될 것 같나요? *

	1	2	3	4	5	
도움이 전혀 안된 다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	매우 도움이 된 다.

다단계 인지진단 평가에 대해 추가로 하고 싶은 말은 무엇인가요?

--

ABSTRACT

A Study of Cognitive Diagnostic Assessment of Computerized Multistage Testing : Focusing on a Sequence of Numbers

Shin, Se-ri

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

The goal of the mathematics evaluation is to help each student learn mathematics and improve his / her overall growth and to improve teaching activities and teaching methods. However, the evaluation that is currently being conducted at schools remains in the role of determining the rank based on the total score. Therefore, Cognitive Diagnostic Assessment has attracted attention for achieving the original goal of evaluation. Cognitive Diagnostic Assessment provides students with information on whether they master cognitive attributes that are the goal of learning. Since there is a hierarchical relationship between cognitive attributes in the mathematical curriculum, it is possible to apply Cognitive Diagnostic Assessment by applying Attribute Hierarchy

Method (AHM).

In addition, today's assessments are based on paper-and-pencil assessments, which are conducted on the same questionnaires for all students regardless of their individual abilities. In order to overcome limitations of paper-based evaluation, Computerized Adaptive Testing (CAT) are being developed to evaluate the students based on their ability. One of Computerized Adaptation Testing, Multi-Stage Testing (MST), is an evaluation method in which questions are grouped in modules, and modules are presented according to students' responses. Therefore, various questionnaires are presented according to the individual ability of the students.

In this study, we conducted adaptive Cognitive Diagnostic Assessment that reflects the hierarchical nature of mathematics curriculum by utilizing computer. To do so, we proposed a CDA based on Multi-Stage Testing, Bayesian network, and Attribute Hierarchical Method and we inspected its efficacy.

For the study, we composed a multi-stage CDA that focused to the topic of sequence of numbers, and 291 second-year high school students in Seoul were surveyed.

After extracting the cognitive attributes related to sequence of numbers and its prerequisites, the cognitive attributes were grouped and the corresponding questions were selected as modules. In the area of elementary school curriculum, 'pattern recognition and linguistic expression', 'function recognition', 'technical knowledge' in middle school curriculum, 'general term of sequence of numbers', 'sum of arithmetic-geometric sequence of numbers', and 'sum of various sequence of numbers' were selected as seven modules in total. The test was started with the 'general term of the sequence' module, the Bayesian network was applied to each module, the students' ability was

estimated, then an algorithm routes the next module according to their ability.

The results of the test confirmed that many students were well acquainted with the prerequisite cognitive attributes related to the sequence of numbers. However, they had difficulties at understanding the formula such as calculating the general term of sequence or sum of the sequence and understanding of symbols and terms in the topic of sequence of numbers. The questionnaire also showed that students understood the significance of the adaptive Cognitive Diagnostic Assessment and were positive about the efficiency of the evaluation and the provision of diagnostic information.

This study suggested a method of computerized adaptive Cognitive Diagnostic Assessment that reflects the hierarchy. The implication of this study is that the suggested assessment method could overcome limitations of conventional tests, which were conducted to students with various ability levels, and could diagnose students' learning status more accurately.

Key Words : Multi-stage testing, Cognitive diagnostic assessment, Attribute hierarchy method, Bayesian network, A sequence of numbers

Student Number : 2015-21605